

## BE COMMANDE NUMÉRIQUE

**Wissal GUARNI**

**Justin BOS**

**Nolan REYNIER NOMER**

**Aleksander TABAN**

Elèves Ingénieurs de l'INSA Toulouse

Département GEI

Spécialité AE-SE

Promotion 60

2022-2027

**Digital control of a cantilever beam**

**Bureau d'études en Commande Numérique**

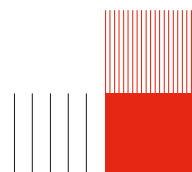
**Professeurs**

Jesus-Pablo TOLEDO-ZUCCO

Yassine ARRIBA

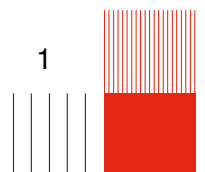
# SOMMAIRE

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Modelisation</b>	<b>2</b>
1.1 Question 1 . . . . .	2
1.2 Question 2 . . . . .	2
1.3 Question 3 . . . . .	4
1.4 Question 4 . . . . .	5
1.5 Question 5 . . . . .	5
1.6 Question 6 . . . . .	6
<b>2 Retour de sortie</b>	<b>6</b>
2.1 Question 7 . . . . .	6
2.2 Question 8 . . . . .	7
2.3 Question 9 . . . . .	7
2.4 Question 10 . . . . .	7
<b>3 Retour d'état</b>	<b>7</b>
3.1 Question 11 . . . . .	7
3.2 Question 12 . . . . .	8
3.3 Question 13 . . . . .	8
3.4 Question 14 . . . . .	9
<b>4 Rejection de perturbation</b>	<b>9</b>
4.1 Question 15 . . . . .	9
4.2 Question 16 . . . . .	10
4.3 Question 17 . . . . .	10
4.4 Question 18 . . . . .	10
4.5 Question 19 . . . . .	11
4.6 Question 20 . . . . .	11
<b>5 VIEUX PROJET À RETIRER MAIS ON LE GARDE TEMPORAIREMENT POUR COPIER-COLLER</b>	<b>12</b>
5.1 Analyse du schéma bloc et setup . . . . .	13
5.2 Mise en oeuvre de N4SID . . . . .	13
5.3 Fonction transfert du système : Rail . . . . .	13
5.4 Calcul du correcteur du système : P . . . . .	13
5.5 Theorie de la loi de commande . . . . .	13
5.6 Une sous section . . . . .	14
5.6.1 Une sous sous section . . . . .	14
<b>Conclusion</b>	<b>15</b>



# INTRODUCTION

Blabla



# 1 MODELISATION

$$\dot{x}_1, \dot{x}_2 = f(e_1, e_2, q)$$

$$\begin{cases} x_1(\zeta, t) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varepsilon^2} \\ x_2(\zeta, t) = \rho(\zeta) \frac{\partial \omega}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_1(\zeta, t) = EI(\zeta) x_1 \\ e_2(\zeta, t) = \frac{1}{\rho(\zeta)} x_2 = \frac{\partial \omega}{\partial t} \end{cases}$$

## 1.1 Question 1

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial t} \right) \\ \dot{x}_2 = \rho(\zeta) \frac{\partial^2 \omega}{\partial t} = \underbrace{-\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} (EI(\zeta) \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2}) - q(\zeta, t)}_{\text{EDP}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\partial^2 e_2}{\partial \zeta^2} \\ \dot{x}_2 = -\frac{\partial^2 e_1}{\partial \zeta^2} - q(\zeta, t) \end{cases}} \quad (1)$$

## 1.2 Question 2

$$\begin{cases} x_1 \approx \phi^T x_{1d}(t) \\ x_2 \approx \phi^T x_{2d}(t) \end{cases} \quad \begin{cases} e_1 \approx \phi^T e_{1d}(t) \\ e_2 \approx \phi^T e_{2d}(t) \end{cases}$$

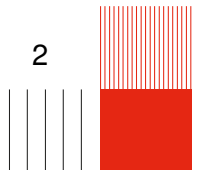
En utilisant la première ligne de l'équation 1, on trouve :

$$\int \phi(\zeta) d\zeta \times \phi^T \dot{x}_{1d} = \int \phi(\zeta) d\zeta \times \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} = \ddot{\phi}(\zeta)^T e_{2*d}$$

$$\underbrace{\int_0^L \phi(\zeta) \phi(\zeta)^T d\zeta}_E \times \dot{x}_{1d} = \left( \int_0^L \phi(\zeta) \ddot{\phi}(\zeta) d\zeta \right) e_{2d} \quad (2)$$

Intégration par partie (IPP) :

$$\int_0^L u \cdot \dot{v} d\zeta = [u \cdot v]_0^L - \int_0^L \dot{u} \cdot v d\zeta$$



Dans notre cas :

$$\begin{cases} u = \phi(\zeta) \\ \dot{v} = \ddot{\phi}(\zeta)^T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = \dot{\phi}(\zeta) \\ v = \dot{\phi}(\zeta)^T \end{cases}$$

On applique plusieurs fois :

$$\begin{aligned} \int_0^L \phi(\zeta) \ddot{\phi}(\zeta)^T d\zeta &= [\phi(\zeta) \dot{\phi}(\zeta)^T]_0^L - \int_0^L \dot{\phi}(\zeta) \dot{\phi}(\zeta)^T d\zeta \\ &= \phi(L) \dot{\phi}(L)^T - \underbrace{\phi(0) \dot{\phi}(0)^T}_{=0} - \int_0^L \dot{\phi}(\zeta) \dot{\phi}(\zeta)^T d\zeta \\ &= \phi(L) \dot{\phi}(L)^T - \dot{\phi}(L) \phi(L)^T + \underbrace{\dot{\phi}(0) \phi(0)^T}_{=0} + \int_0^L \ddot{\phi}(\zeta) \phi(\zeta)^T d\zeta \\ &= \phi(L) \dot{\phi}(L)^T - \dot{\phi}(L) \phi(L)^T + \int_0^L \ddot{\phi}(\zeta) \phi(\zeta)^T d\zeta = D \end{aligned}$$

On continue avec ça en remplaçant dans l'équation 2 :

$$\Rightarrow \boxed{E \dot{x}_{1d} = D e_{2d}}$$

Puis on a dans la deuxième ligne de l'équation 1 :

$$\begin{aligned} \phi^T(\zeta) \dot{x}_{2d} &= -\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} (\phi(\zeta)^T e_{1d}) - q(\zeta, t) \\ \int_0^L \phi^T(\zeta) d\zeta \times \dot{x}_{2d} &= -e_{1d} \int_0^L \phi(\zeta) \ddot{\phi}(\zeta)^T d\zeta - \underbrace{\int_0^L \phi(\zeta) q(\zeta, t) d\zeta}_{=F_{ext}} \end{aligned}$$

Puis on trouve D :

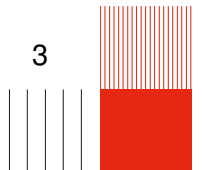
$$\begin{aligned} D &= \phi(L) \dot{\phi}(L)^T - \phi(L) \dot{\phi}(L)^T + \int_0^L \ddot{\phi}(\zeta) \phi(\zeta)^T d\zeta \\ \Rightarrow D^T &= \dot{\phi}(L) \phi(L)^T - \dot{\phi}(L) \phi(L)^T + \int_0^L \phi(\zeta) \ddot{\phi}(\zeta) d\zeta \\ \Rightarrow \boxed{\int_0^L \underbrace{\phi(\zeta) \ddot{\phi}(\zeta)^T}_{=0} d\zeta} &= D^T - \dot{\phi}(L) \phi(L)^T + \phi(L) \dot{\phi}(L)^T \end{aligned}$$

Donc :

$$E \dot{x}_{2d} = -e_{1d} D^T + \underbrace{e_{1d} \dot{\phi}(L) \phi(L)^T}_{=0} - e_{1d} \phi(L) \dot{\phi}(L)^T - F_{ext}$$

Or on sait que :

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{de_1}{d\zeta} = u(t) \Rightarrow \dot{\phi}(L)^T e_{1d} = u(t) \\ e_1(L, t) = 0 \Rightarrow \phi(L)^T e_{1d} = 0 \end{cases} \quad (3)$$



Donc :

$$E\dot{x}_{2d} = -e_{1d}D^T - \phi(L)u(t) - F_{ext}$$

Puis on a :

$$\begin{cases} y(t) = -e_2(L, t) \\ e_2(L, t) \approx \phi(L)^T e_{2d} \end{cases}$$

Ce qui nous donne l'approximation :

$$y(t) = -\phi(L)^T e_{2d}$$

### 1.3 Question 3

On a :

$$\begin{cases} e_1 = EI x_1 = x_1 \Rightarrow e_{1d} = x_{1d} \\ e_2 = \frac{1}{\rho(\zeta)} x_2 = x_2 \Rightarrow e_{2d} = x_{2d} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} E\dot{X}_{1d} = D x_{2d} \\ E\dot{X}_{2d} = -D^T x_{1d} - \phi(L)u(t) - 0 \\ y = -\phi(L)^T x_{2d} \end{cases}$$

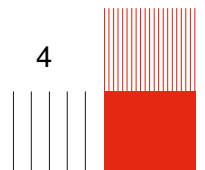
Ce qui nous donne :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E^{-1}D \\ -E^{-1}D^T & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ -E^{-1}\phi(L) \end{pmatrix}, C = (0 \quad -\phi(L)^T)$$

Pour :

$$\begin{cases} \zeta = L = 1 \\ \phi(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{déclara } A, B, C \text{ en MATLAB} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 114 & 6 & 12 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -54 & 6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1188 & -12 & -114 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -828 & -12 & -54 & 0 \\ 6 & 54 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -114 & -2 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -828 & -6 & 54 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -1188 & -6 & 114 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ -16 \\ -60 \\ -120 \end{pmatrix}, C = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0)$$

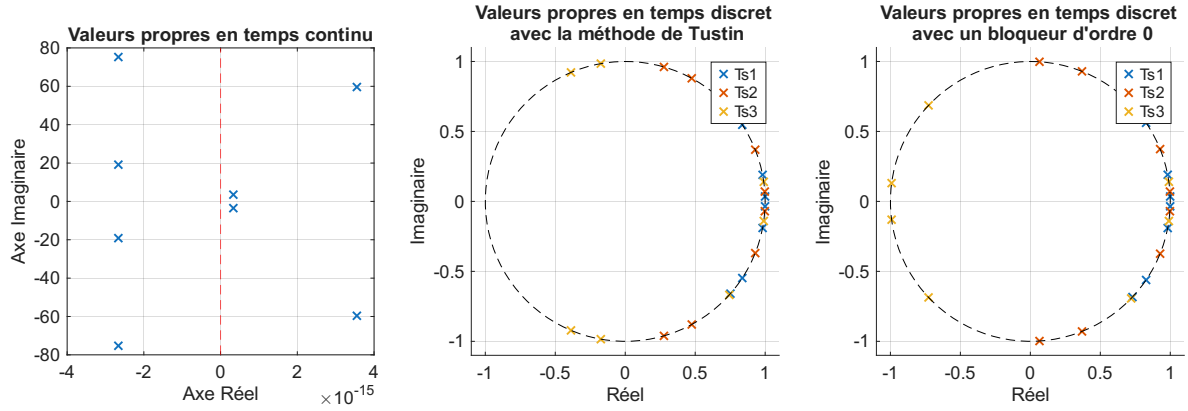


## 1.4 Question 4

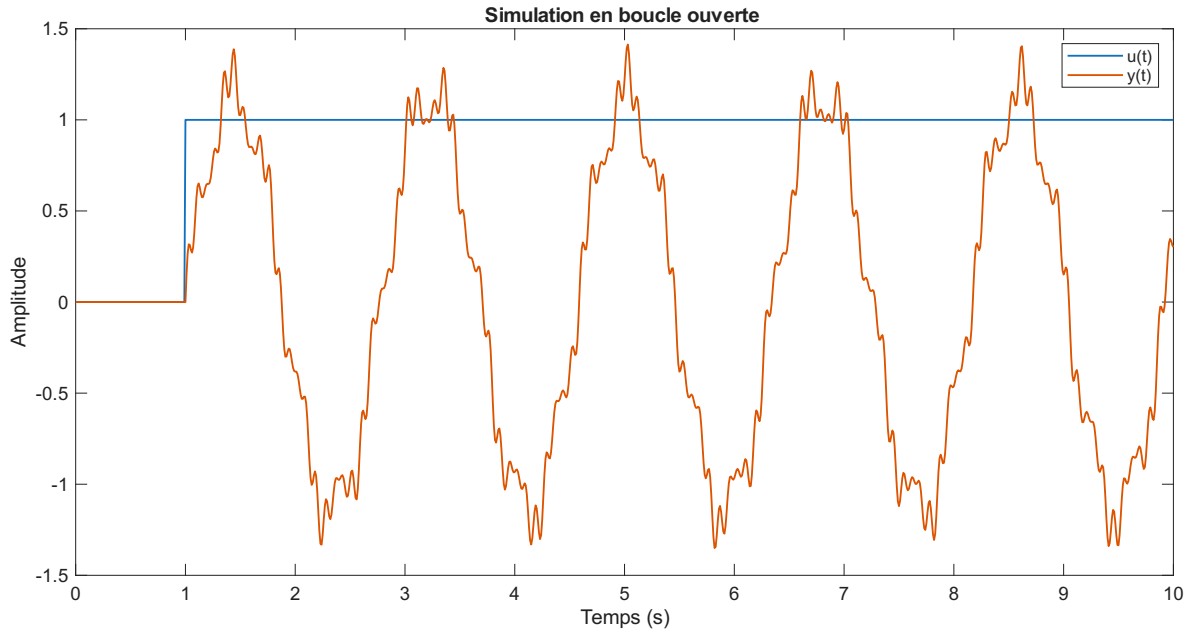
$$\omega(p, t) = C_\omega(p)x_d(t)$$

$$C_\omega(p) = \begin{bmatrix} \frac{p^2(2p^3-5p^2+10)}{20} & -\frac{p^4(2p-5)}{20} & \frac{p^3(3p^2-10p+10)}{60} & \frac{p^4(3p-5)}{60} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\phi(L)^T = \begin{bmatrix} 2p^3 - 3p^2 + 1 & 3p^2 - 2p^3 & p^3 - 2p^2 + p & p^3 - p^2 \end{bmatrix}$$



## 1.5 Question 5



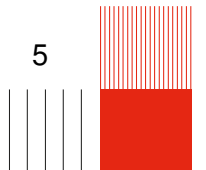
$$y = -\phi(L)^T e_{2d}$$

$$y = -e_2(L, t)$$

$$e_2(\zeta, t) \approx \phi(\zeta)^T e_{2d}(t)$$

$$x_1 = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2}(\zeta, t) \approx \phi(\zeta)^2 x_{1d}$$

$$x_2(\zeta, t) = \rho(\zeta) \frac{\partial \omega}{\partial t}(\zeta, t) \approx \phi(\zeta)^T x_{2d}$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1d} \\ \dot{x}_{2d} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{1d} \\ x_{2d} \end{bmatrix} + Bu \quad y = C \begin{bmatrix} x_{1d} \\ x_{2d} \end{bmatrix}$$

## 1.6 Question 6

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2}(\zeta, t) \\ \rho(\zeta) \frac{\partial \omega}{\partial t}(\zeta, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(\zeta)^T & 0000 \\ 0000 & \phi(\zeta)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1d} \\ x_{2d} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2}(\zeta, t) = \underbrace{[\phi(\zeta)^T \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]}_{C.I.=0+0} x_d(t)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \zeta}(\zeta, t) = \int \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2}(\zeta, t) d\zeta = x_d(t) \int [\phi(\zeta)^T \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] d\zeta + C_1(t)$$

$$\omega(\zeta, t) = \int \int \frac{\partial^2 \omega}{\partial^2 \zeta^2}(\zeta, t) d\zeta^2 = x_d(t) \int \int [\phi(\zeta)^T \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] d\zeta^2 + \underbrace{\int C_1(t) d\zeta + C_2(t)}_{\zeta C_1(t) + C_2(t)}$$

$C_1$  et  $C_2$  ??????????????????

## 2 RETOUR DE SORTIE

### 2.1 Question 7

La sortie est donnée par  $y(t) = C x_d(t)$ , donc le système en boucle fermée s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_d(t) = (A - BCK) x_d(t) + BH w_c(L, t) \\ w(L, t) = C_w(L) x_d(t) \end{cases}$$

En régime permanent,  $\dot{x}_d(t) = 0$ , donc :

$$0 = (A - BCK) x_d + BH C_w(L) x_d \Rightarrow x_d = -(A - BCK)^{-1} BH w_c(L, t)$$

En multipliant l'expression par  $C_w(L)$ , on trouve :

$$w(L, t) = C_w(L) x_d = -C_w(L)(A - BCK)^{-1} BH w_c(L, t)$$

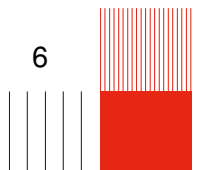
Pour assurer le suivi  $w(L, t) = w_c(L, t)$ , il faut :

$$-C_w(L)(A - BCK)^{-1} BH = I$$

D'où :

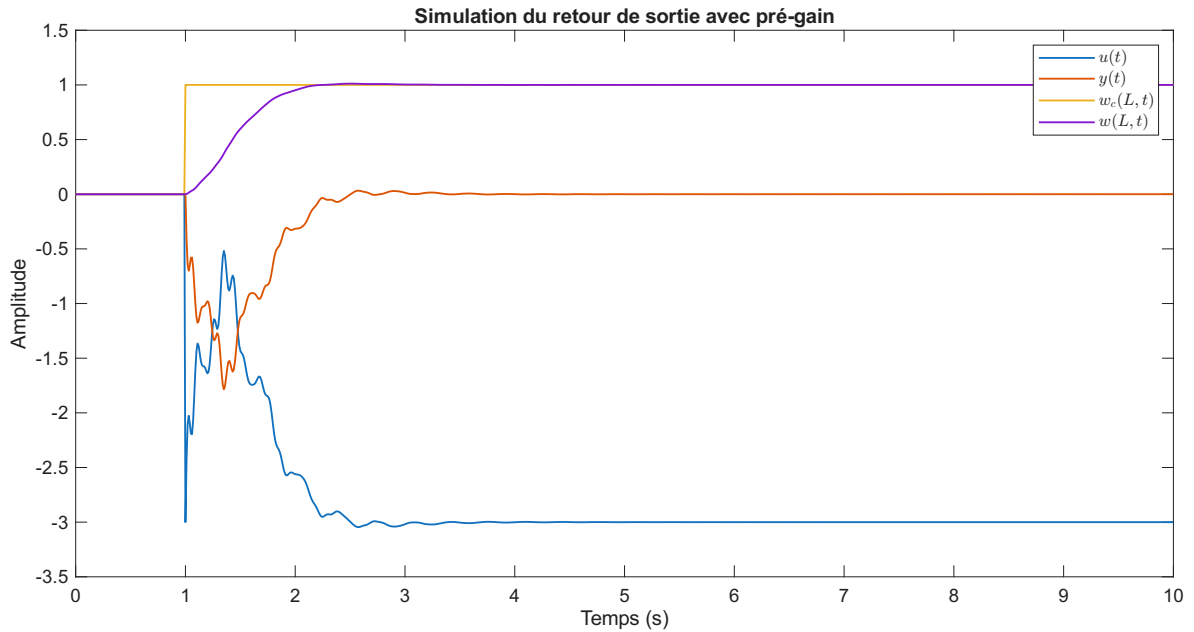
$$H = -(C_w(L)(A - BCK)^{-1} B)^{-1}$$

Finalement, après calcul sous MATLAB, on obtient  $H = -3$ .





## 2.2 Question 8



## 2.3 Question 9

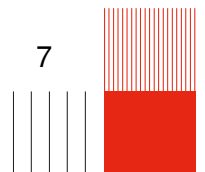
## 2.4 Question 10

# 3 RETOUR D'ÉTAT

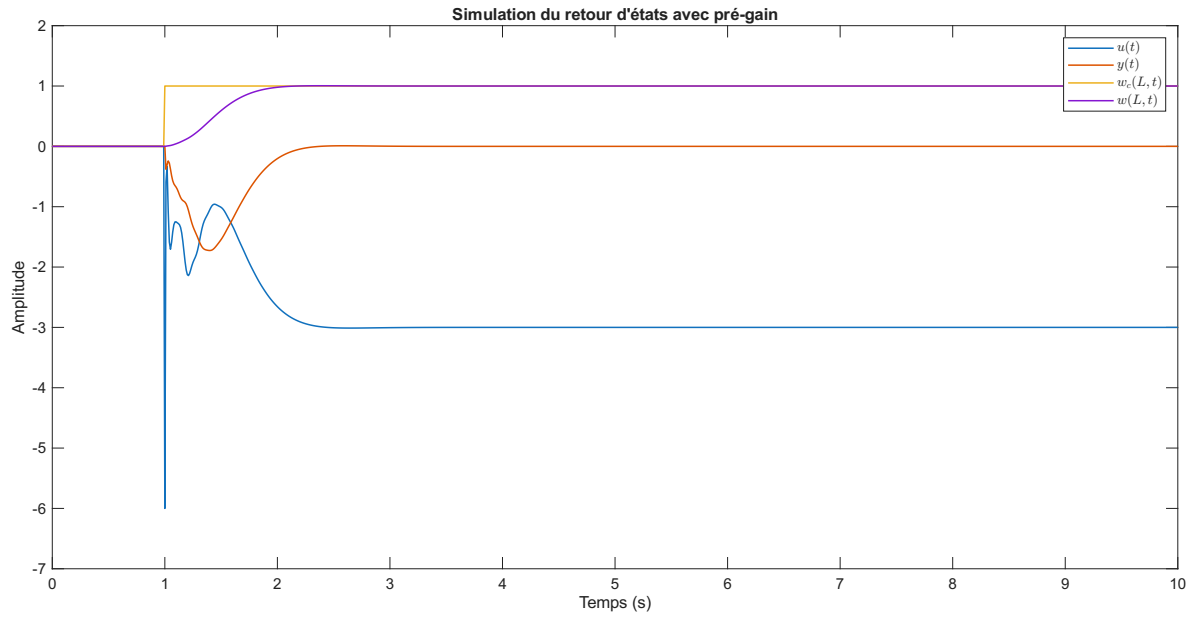
## 3.1 Question 11

En utilisant la fonction `lqr()` de MATLAB avec  $Q = I_8$  et  $R = 1$ , on trouve la matrice de gain  $K$  suivante :

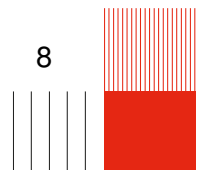
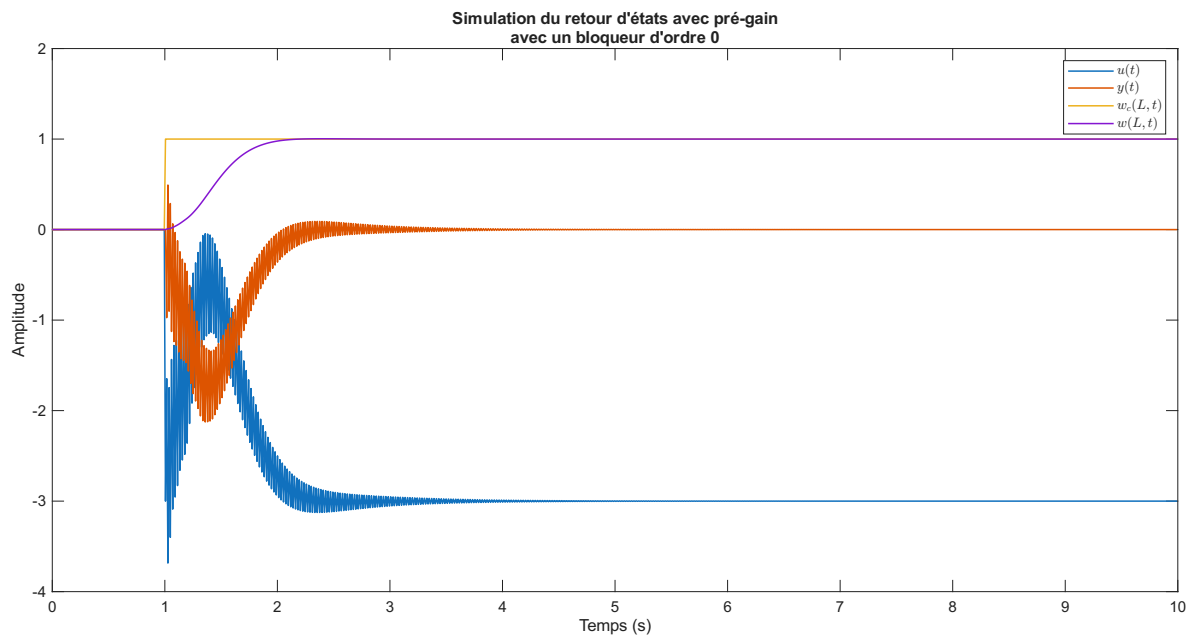
$$K = (0.97 \quad -14.62 \quad 0.66 \quad 1.32 \quad 19.32 \quad 0.39 \quad 2.40 \quad -2.11)$$



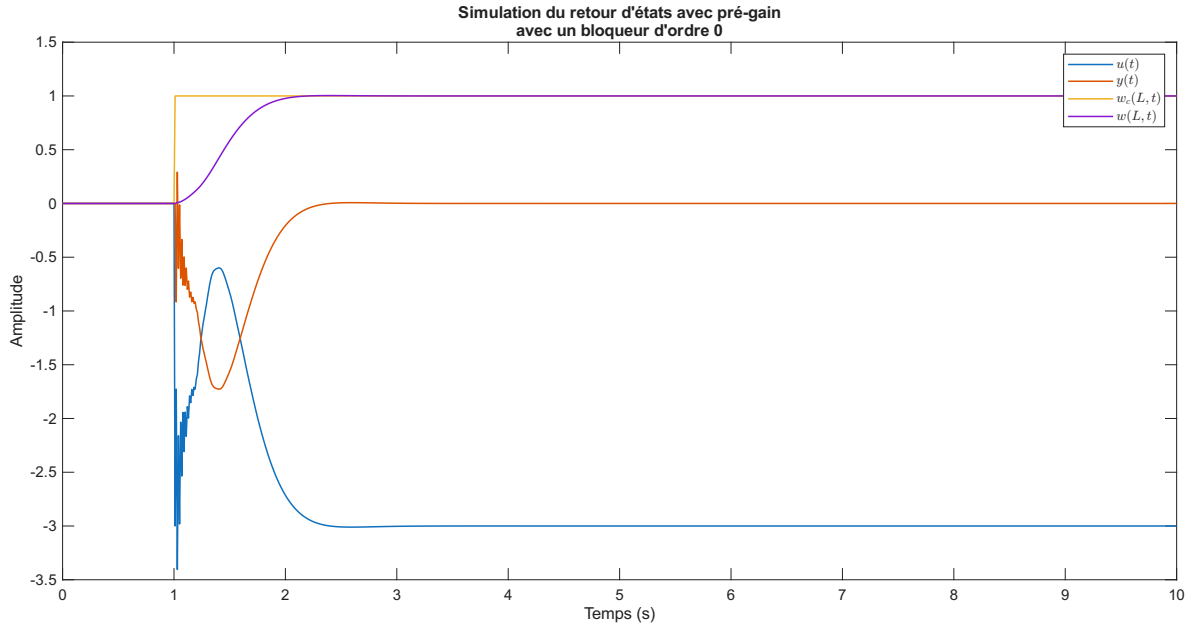
## 3.2 Question 12



## 3.3 Question 13



### 3.4 Question 14



## 4 REJECTION DE PERTURBATION

### 4.1 Question 15

On sait que :

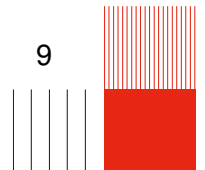
$$F_{ext} = \int_0^L \phi(\zeta) q(\zeta, t) d\zeta \Rightarrow F_{ext} = q_0(t) \cdot \int_0^L \phi(\zeta) d\zeta \text{ car } q(\zeta, t) = q_0(t)$$

Or on a :

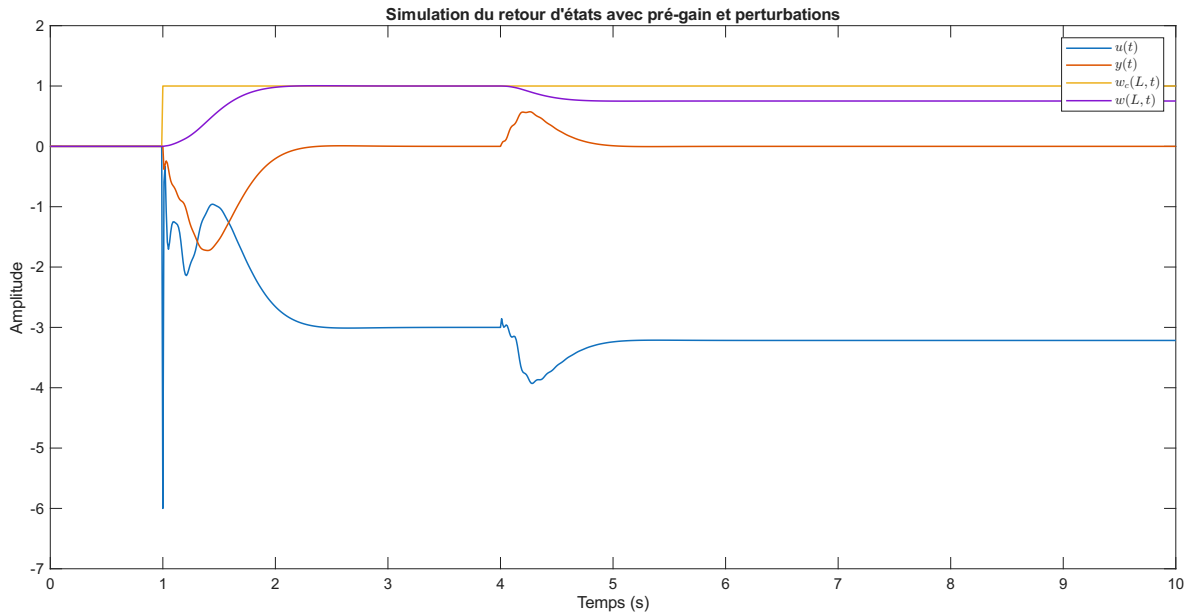
$$E\dot{x}_{2d} = -e_{1d}D^T - \phi(L)u(t) - F_{ext}$$

Donc, puisque  $\dot{x}_d(t) = Ax_d(t) + Bu(t) + B_p q_0(t)$ , on trouve :

$$B_p = \begin{pmatrix} 0_{4 \times 1} \\ -\int_0^L \phi(\zeta) d\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{4 \times 1} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$$



## 4.2 Question 16



Notre système ne permet pas de garantir une erreur nulle en régime permanent face à une perturbation constante.

## 4.3 Question 17

Nous souhaitons garder les mêmes valeurs propres que celles obtenues lors de la question 11 avec la LQR. La valeur propre supplémentaire doit être plus à droite pour permettre de rejeter la perturbation. On choisit  $\lambda_9 = -2$ . On trouve alors :

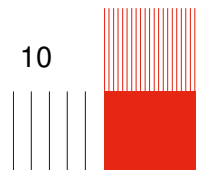
$$\lambda = (-84.66 \quad -7.56 \pm 68.77i \quad -27.97 \pm 17.24i \quad -15.91 \quad -4.38 \pm 2.66i \quad -2)^T$$

## 4.4 Question 18

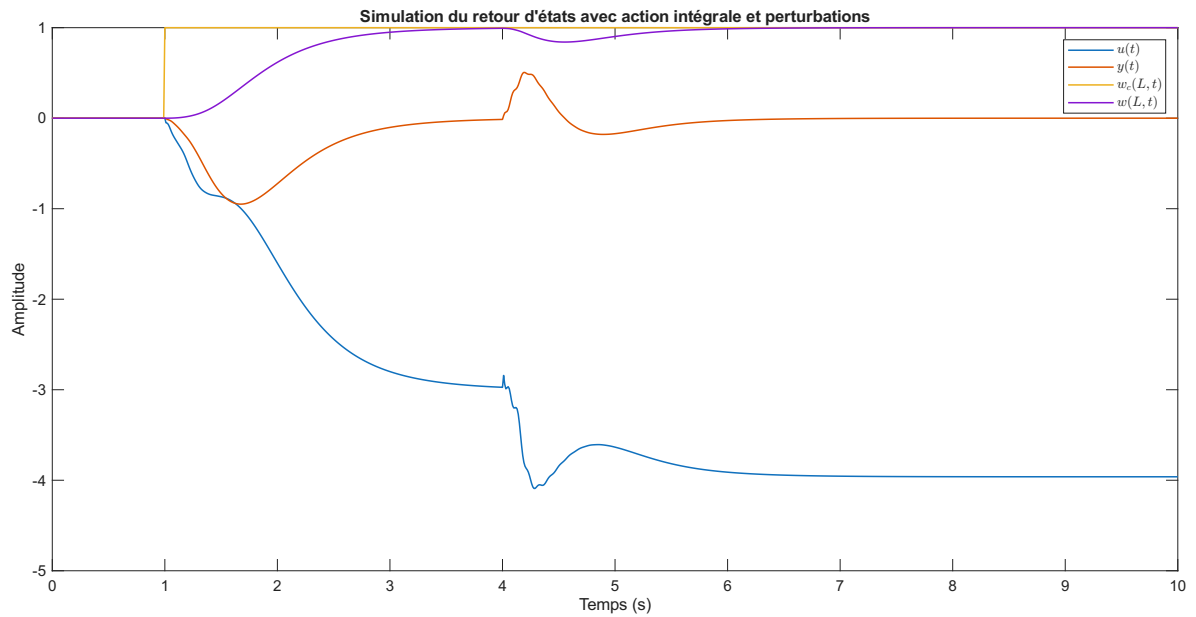
En utilisant la fonction `place()` de MATLAB, on trouve la matrice de gain  $K$  suivante :

$$K_{aug} = (K_1 \quad K_i) \quad \text{avec} \quad K_1 \in \mathbb{R}^{1 \times 8}, \quad K_i \in \mathbb{R}$$

$$K_{aug} = (-0.89 \quad -16.59 \quad 0.28 \quad 1.68 \quad 19.39 \quad -0.84 \quad 2.36 \quad -1.94 \quad 12.00)$$

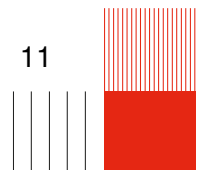


## 4.5 Question 19



En utilisant l'action intégrale, on parvient à rejeter la perturbation constante et à garantir une erreur nulle en régime permanent.

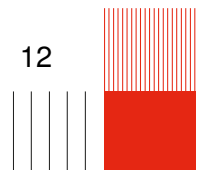
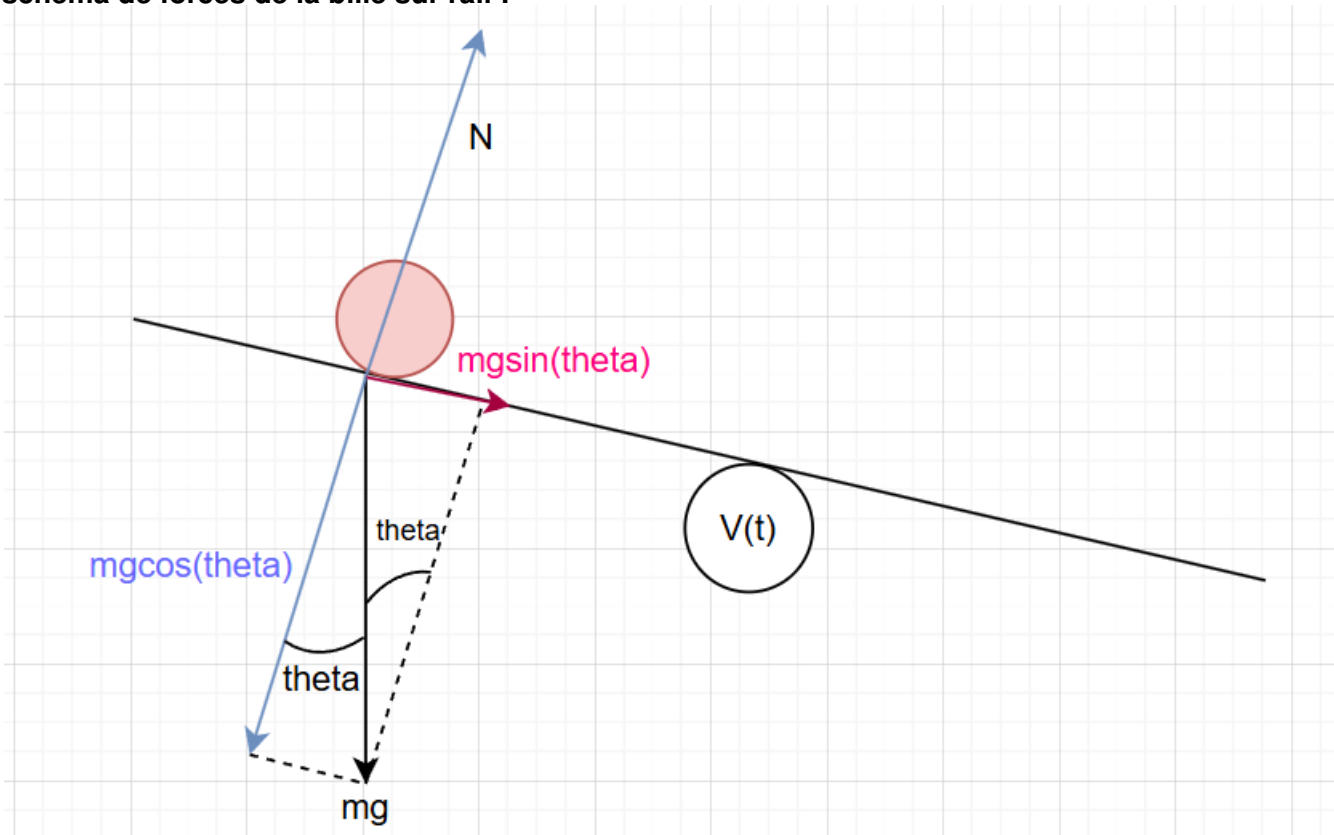
## 4.6 Question 20



## 5 VIEUX PROJET À RETIRER MAIS ON LE GARDE TEMPORAIREMENT POUR COPIER-COLLER

Le bille sur rail est une manipulation où le but est de stabiliser une bille sur un rail. Le rail est commandé par une tension, et les données lues sont l'angle du rail et la position de la bille. La position est achevée à l'aide d'un lecteur d'impédance.

Le schéma de forces de la bille sur rail :



## 5.1 Analyse du schéma bloc et setup

Nous avons remarqué que l'identification du système se fait en bouclé fermé. Voici le schéma bloc désignant le système que nous pouvons manipuler : {Sett inn bilde av schéma bloc, système rail}

## 5.2 Mise en oeuvre de N4SID

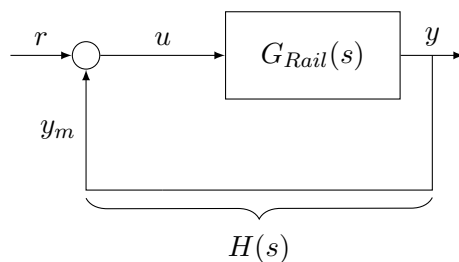
On a utilisé la fonction `n4sid()` du GIT de Mr. Poussot. Nous avons fait une expérience temporel, fréquentiel et avec Loewner. Voici le comportement des différents modèles obtenus : {Sett inn bilde av n4sid}

Cela nous avait mené à résumer le système du rail à la fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{NUM}{DEN}$$

## 5.3 Fonction transfert du système : Rail

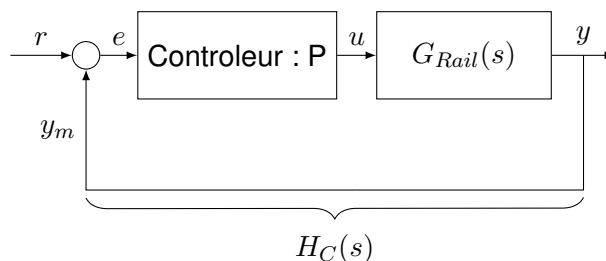
Après avoir trouvé un modèle qui nous va, nous avons ensuite retrouvé la vraie fonction de transfert du rail. Avec la relation qui suit :



$$H(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \Rightarrow G(s) = \frac{H(s)}{1 + H(s)} \quad (4)$$

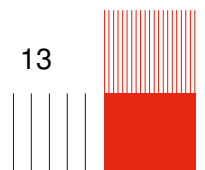
## 5.4 Calcul du correcteur du système : P

On a testé plusieurs valeurs, et conclue que juste un correcteur proportionnel du gain 1 fonctionne très bien.



## 5.5 Theorie de la loi de commande

Faut mettre des choses ici. Je push !



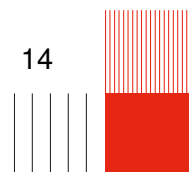
## 5.6 Une sous section

### 5.6.1 Une sous sous section

Un mot compliqué <sup>1</sup>

---

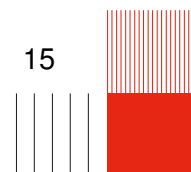
1. Une note de bas de page





# CONCLUSION

Une conclusion





## **INSA TOULOUSE**

135 avenue de Rangueil  
31400 Toulouse

Tel : +33 (0)5 61 55 95 13

**[www.insa-toulouse.fr](http://www.insa-toulouse.fr)**

