

BE COMMANDE NUMÉRIQUE

Wissal GUARNI

Justin BOS

Nolan REYNIER NOMER

Aleksander TABAN

Elèves Ingénieurs de l'INSA Toulouse

Département GEI

Spécialité AE-SE

Promotion 60

2022-2027

Commande numérique d'une porte-à-faux

Bureau d'études en Commande Numérique

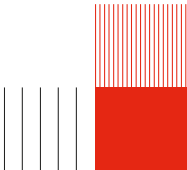
Professeurs

Jesus-Pablo TOLEDO-ZUCCO

Yassine ARRIBA

SOMMAIRE

1	Modelisation	1
1.1	Question 1	1
1.2	Question 2	1
1.3	Question 3	1
1.4	Question 4	1
1.5	Question 5	2
1.6	Question 6	3
2	Retour de sortie	3
2.1	Question 7	3
2.2	Question 8	4
2.3	Question 9	4
2.4	Question 10	4
3	Retour d'état	5
3.1	Question 11	5
3.2	Question 12	5
3.3	Question 13	5
3.4	Question 14	6
4	Rejection de perturbation	6
4.1	Question 15	6
4.2	Question 16	7
4.3	Question 17	7
4.4	Question 18	7
4.5	Question 19	8
4.6	Question 20	8
5	Annexe	A
5.1	Question 2	A
5.2	Question 3	B



1 MODELISATION

$$\dot{x}_1, \dot{x}_2 = f(e_1, e_2, q) \quad \begin{cases} x_1(\zeta, t) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varepsilon^2} \\ x_2(\zeta, t) = \rho(\zeta) \frac{\partial \omega}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{cases} e_1(\zeta, t) = EI(\zeta) x_1 \\ e_2(\zeta, t) = \frac{1}{\rho(\zeta)} x_2 = \frac{\partial \omega}{\partial t} \end{cases}$$

1.1 Question 1

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial t} \right) \\ \dot{x}_2 = \rho(\zeta) \frac{\partial^2 \omega}{\partial t} = \underbrace{-\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} (EI(\zeta) \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2}) - q(\zeta, t)}_{\text{EDP}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\partial^2 e_2}{\partial \zeta^2} \\ \dot{x}_2 = -\frac{\partial^2 e_1}{\partial \zeta^2} - q(\zeta, t) \end{cases}} \quad (1)$$

1.2 Question 2

Voir annexe.

1.3 Question 3

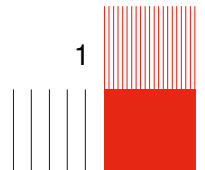
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 114 & 6 & 12 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -54 & 6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1188 & -12 & -114 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -828 & -12 & -54 & 0 \\ 6 & 54 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -114 & -2 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -828 & -6 & 54 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -1188 & -6 & 114 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ -16 \\ -60 \\ -120 \end{pmatrix}, C = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0)$$

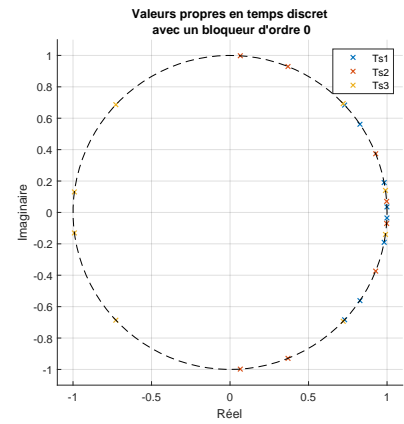
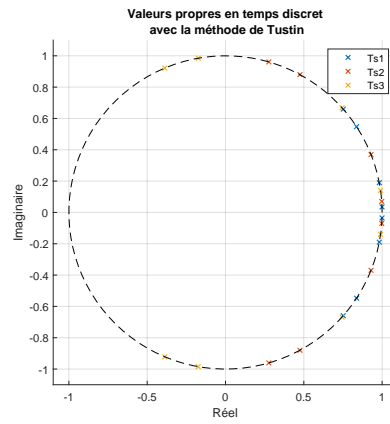
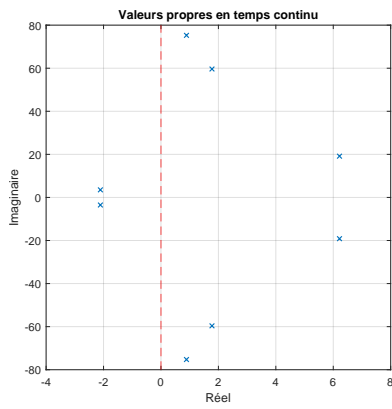
1.4 Question 4

$$\omega(p, t) = C_\omega(p) x_d(t)$$

$$C_\omega(p) = \begin{bmatrix} \frac{p^2(2p^3-5p^2+10)}{20} & -\frac{p^4(2p-5)}{20} & \frac{p^3(3p^2-10p+10)}{60} & \frac{p^4(3p-5)}{60} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

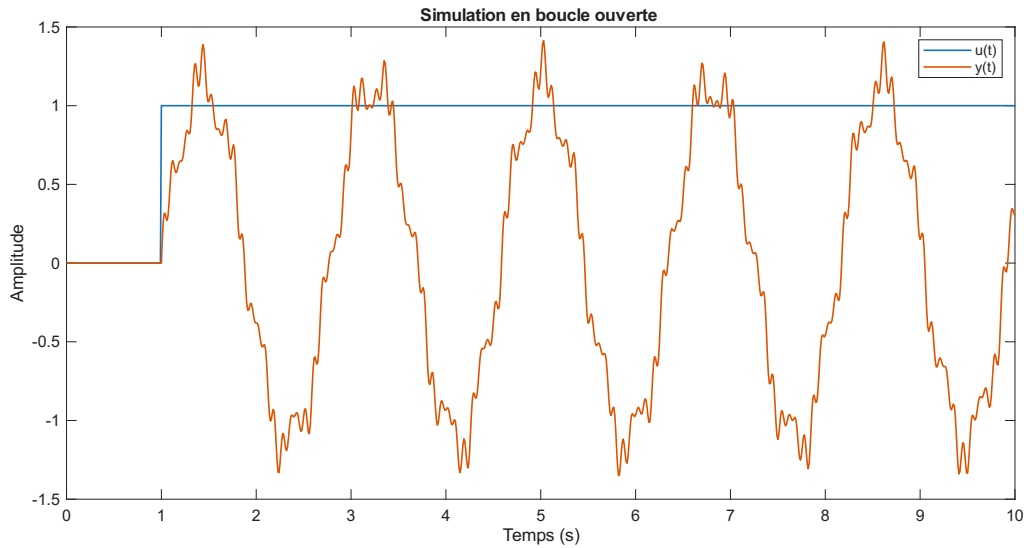
$$\phi(L)^T = [2p^3 - 3p^2 + 1 \quad 3p^2 - 2p^3 \quad p^3 - 2p^2 + p \quad p^3 - p^2]$$





Les valeurs propres du système dans tous les cas (continu, discrétisé avec Tustin et bloqueur d'ordre 0) sont dans les zones de stabilité. La stabilité du système est vérifiée pour tous les cas.

1.5 Question 5



$$y = -\phi(L)^T e_{2d}$$

$$y = -e_2(L, t)$$

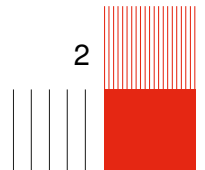
$$e_2(\zeta, t) \approx \phi(\zeta)^T e_{2d}(t)$$

$$x_1 = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2}(\zeta, t) \approx \phi(\zeta)^2 x_{1d}$$

$$x_2(\zeta, t) = \rho(\zeta) \frac{\partial \omega}{\partial t}(\zeta, t) \approx \phi(\zeta)^T x_{2d}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1d} \\ \dot{x}_{1d} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{1d} \\ x_{2d} \end{bmatrix} + Bu$$

$$y = C \begin{bmatrix} x_{1d} \\ x_{2d} \end{bmatrix}$$



1.6 Question 6

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2}(\zeta, t) \\ \rho(\zeta) \frac{\partial \omega}{\partial t}(\zeta, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(\zeta)^T & 0_{1 \times 4} \\ 0_{1 \times 4} & \phi(\zeta)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1d} \\ x_{2d} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2}(\zeta, t) = \underbrace{[\phi(\zeta)^T \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]}_{C.I.=0+0} x_d(t)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \zeta}(\zeta, t) = \int \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2}(\zeta, t) d\zeta = x_d(t) \int [\phi(\zeta)^T \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] d\zeta + C_1(t)$$

$$\omega(\zeta, t) = \int \int \frac{\partial^2 \omega}{\partial^2 \zeta^2}(\zeta, t) d\zeta^2 = x_d(t) \int \int [\phi(\zeta)^T \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] d\zeta^2 + \underbrace{\int C_1(t) d\zeta + C_2(t)}_{\zeta C_1(t) + C_2(t)}$$

Du côté gauche de la poutre soit $\zeta = 0$, la vitesse et la déformation de la poutre sont nulles. Grâce à ces deux données, nous pouvons calculer les constantes représentant les conditions initiales qui sont donc aussi nulles. En calculant les intégrales de $\phi(\zeta)$, nous retrouvons les coefficients de $C_w(\zeta)$. Nous avons alors bien $w(\zeta, t) = C_w(\zeta)x_d(t)$.

2 RETOUR DE SORTIE

2.1 Question 7

La sortie est donnée par $y(t) = C x_d(t)$, donc le système en boucle fermée s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_d(t) = (A - BCK) x_d(t) + BH w_c(L, t) \\ w(L, t) = C_w(L) x_d(t) \end{cases}$$

En régime permanent, $\dot{x}_d(t) = 0$, donc :

$$0 = (A - BCK) x_d + BH C_w(L) x_d \Rightarrow x_d = -(A - BCK)^{-1} BH w_c(L, t)$$

En multipliant l'expression par $C_w(L)$, on trouve :

$$w(L, t) = C_w(L) x_d = -C_w(L)(A - BCK)^{-1} BH w_c(L, t)$$

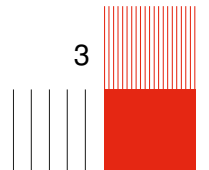
Pour assurer le suivi $w(L, t) = w_c(L, t)$, il faut :

$$-C_w(L)(A - BCK)^{-1} BH = I$$

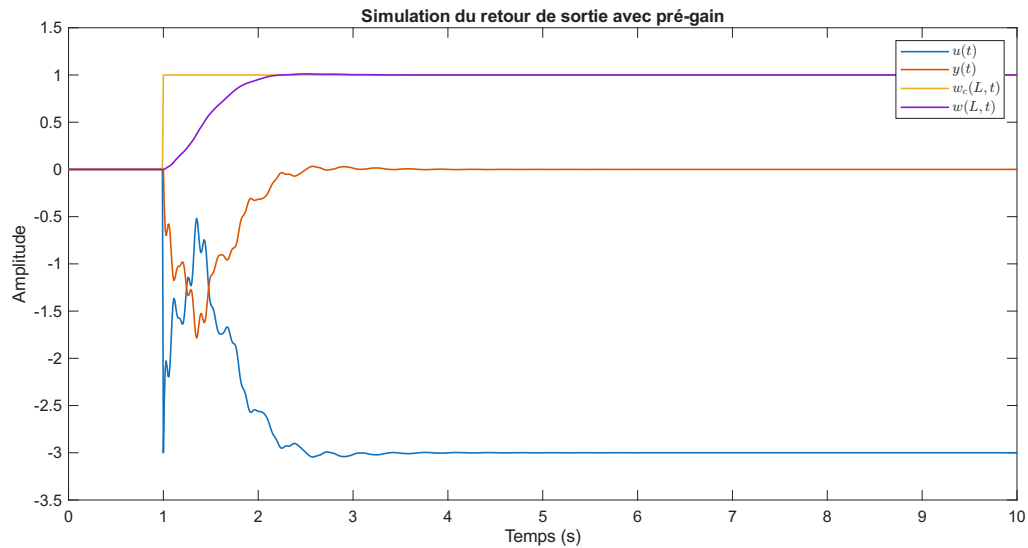
D'où :

$$H = - (C_w(L)(A - BCK)^{-1} B)^{-1}$$

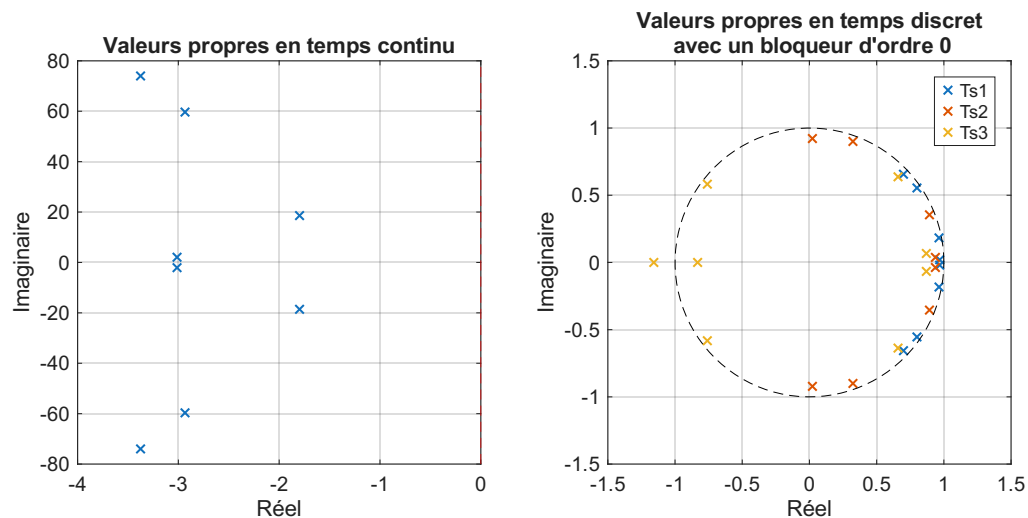
Finalement, après calcul sous MATLAB, on obtient $H = -3$.



2.2 Question 8



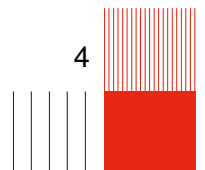
2.3 Question 9

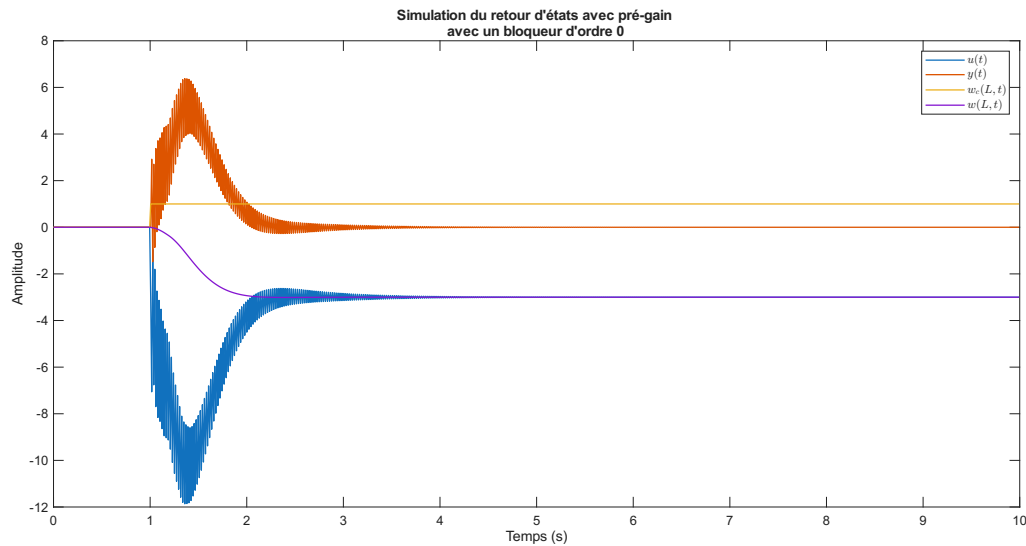


En discrétisant notre système par la période d'échantillonnage $T_{s3} = 0.04 [s]$, on obtient une valeur propre en dehors du cercle unitaire de stabilité. Cette période d'échantillonnage déstabilise le système.

2.4 Question 10

La période d'échantillonnage maximale permettant de garantir la stabilité asymptotique est de $T_s \approx 0.011 [s]$.





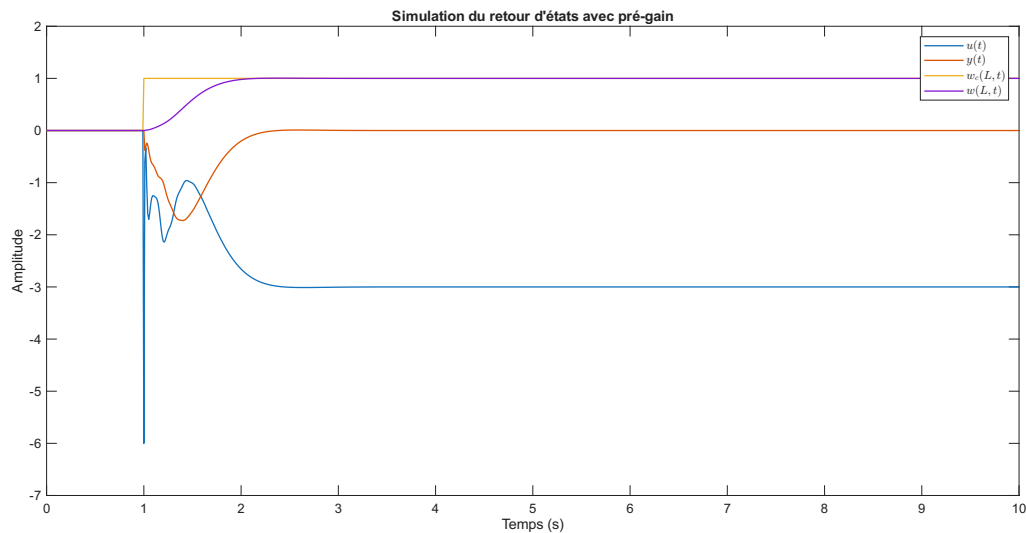
3 RETOUR D'ÉTAT

3.1 Question 11

En utilisant la fonction `lqr()` de MATLAB avec $Q = I_8$ et $R = 1$, on trouve la matrice de gain K suivante :

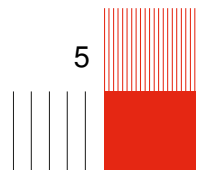
$$K = \begin{pmatrix} 0.97 & -14.62 & 0.66 & 1.32 & 19.32 & 0.39 & 2.40 & -2.11 \end{pmatrix}$$

3.2 Question 12

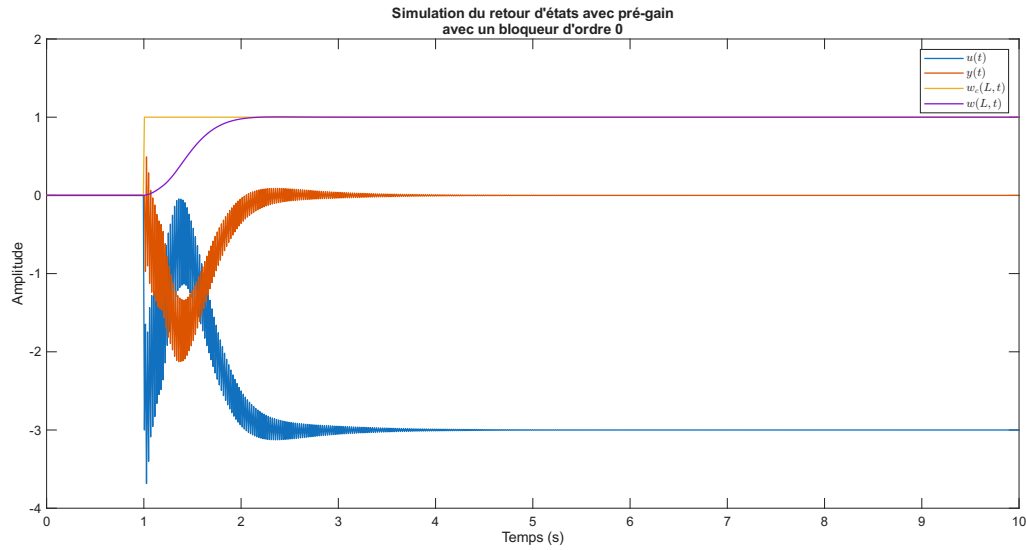


3.3 Question 13

La même période d'échantillonnage que la section précédente n'est pas appropriée pour cette loi de commande. La période d'échantillonnage maximale permettant de garantir la stabilité asymptotique

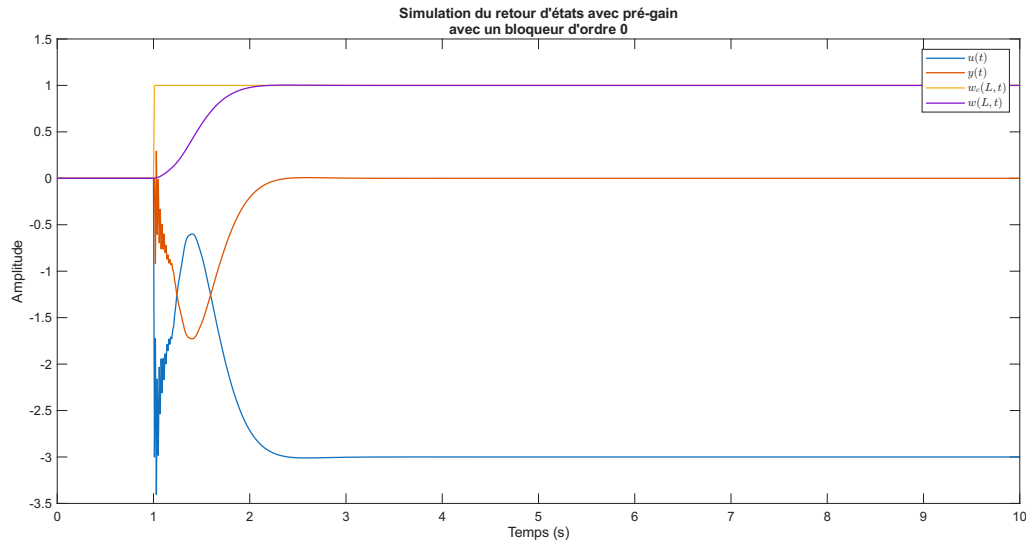


est de $T_s = 0.0107$ [s].



3.4 Question 14

En prenant une période d'échantillonnage $T_s = 0.01$ [s], on se rapproche du comportement désiré de la question 12.

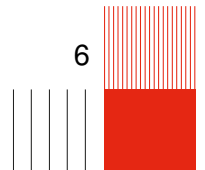


4 REJECTION DE PERTURBATION

4.1 Question 15

On sait que :

$$F_{ext} = \int_0^L \phi(\zeta) q(\zeta, t) d\zeta \Rightarrow F_{ext} = q_0(t) \cdot \int_0^L \phi(\zeta) d\zeta \text{ car } q(\zeta, t) = q_0(t)$$



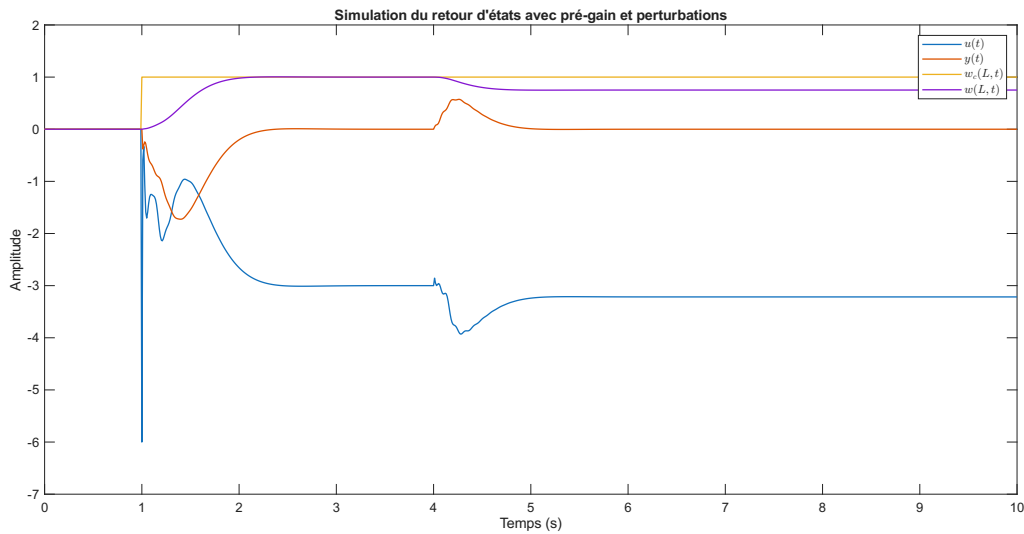
Or on a :

$$E\dot{x}_{2d} = -e_{1d}D^T - \phi(L)u(t) - F_{ext}$$

Donc, puisque $\dot{x}_d(t) = Ax_d(t) + Bu(t) + B_p q_0(t)$, on trouve :

$$B_p = \begin{pmatrix} 0_{4 \times 1} \\ -\int_0^L \phi(\zeta) d\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{4 \times 1} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

4.2 Question 16



Notre système ne permet pas de garantir une erreur nulle en régime permanent face à une perturbation constante.

4.3 Question 17

Nous souhaitons garder les mêmes valeurs propres que celles obtenues lors de la question 11 avec la LQR. La valeur propre supplémentaire doit être plus à droite pour permettre de rejeter la perturbation. On choisit $\lambda_9 = -2$. On trouve alors :

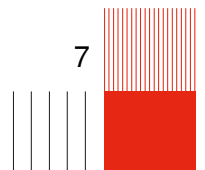
$$\lambda = (-84.66 \quad -7.56 \pm 68.77i \quad -27.97 \pm 17.24i \quad -15.91 \quad -4.38 \pm 2.66i \quad -2)^T$$

4.4 Question 18

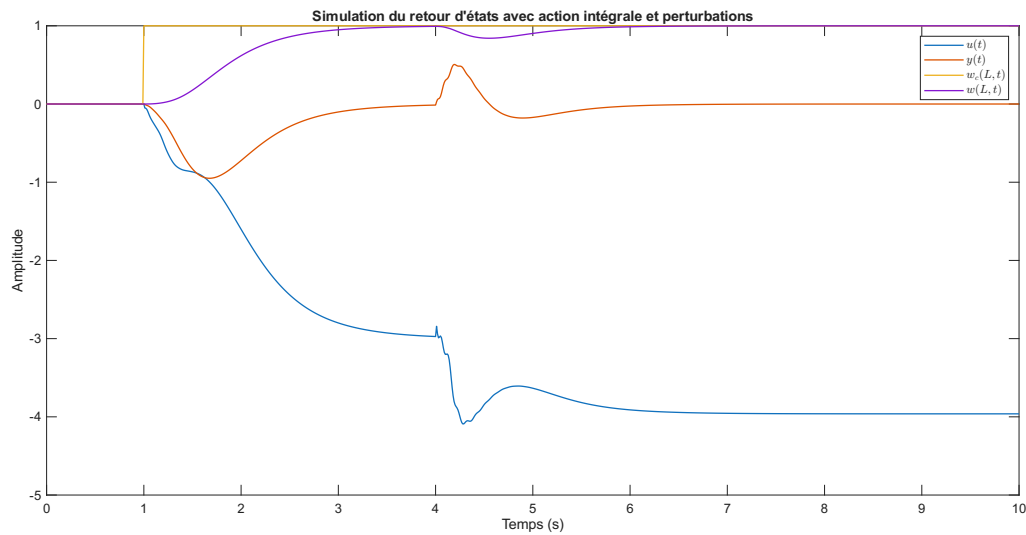
En utilisant la fonction `place()` de MATLAB, on trouve la matrice de gain K suivante :

$$K_{aug} = (K_1 \quad K_i) \quad \text{avec} \quad K_1 \in \mathbb{R}^{1 \times 8}, \quad K_i \in \mathbb{R}$$

$$K_1 = (-0.89 \quad -16.59 \quad 0.28 \quad 1.68 \quad 19.39 \quad -0.84 \quad 2.36 \quad -1.94) \quad K_i = (12.00)$$



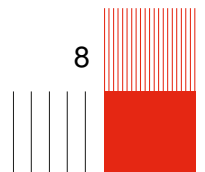
4.5 Question 19



En utilisant l'action intégrale, on parvient à rejeter la perturbation constante et à garantir une erreur nulle en régime permanent.

4.6 Question 20

Nous pouvons utiliser les mêmes gains K_1 et K_i dans l'implémentation avec un contrôleur numérique en prenant une période d'échantillonnage suffisamment court. La période d'échantillonnage maximale garantissant la stabilité asymptotique est de $T_s = 0.01066 [s]$. En divisant la période d'échantillonnage par 5 soit $T_s \approx 0.002 [s]$, on obtient une réponse du système répondant à la performance désirée et à la stabilité.



5 ANNEXE

5.1 Question 2

$$\begin{cases} x_1 \approx \phi^T x_{1d}(t) \\ x_2 \approx \phi^T x_{2d}(t) \end{cases} \quad \begin{cases} e_1 \approx \phi^T e_{1d}(t) \\ e_2 \approx \phi^T e_{2d}(t) \end{cases}$$

En utilisant la première ligne de l'équation 1, on trouve :

$$\begin{aligned} \int \phi(\zeta) d\zeta \times \phi^T \dot{x}_{1d} &= \int \phi(\zeta) d\zeta \times \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} = \ddot{\phi}(\zeta)^T e_{2d} \\ \underbrace{\int_0^L \phi(\zeta) \phi(\zeta)^T d\zeta}_{E} \times \dot{x}_{1d} &= \left(\int_0^L \phi(\zeta) \ddot{\phi}(\zeta) d\zeta \right) e_{2d} \end{aligned} \quad (2)$$

On applique plusieurs fois de l'intégration par partie (IPP) :

$$\begin{aligned} \int_0^L \phi(\zeta) \ddot{\phi}(\zeta)^T d\zeta &= [\phi(\zeta) \dot{\phi}(\zeta)^T]_0^L - \int_0^L \dot{\phi}(\zeta) \dot{\phi}(\zeta)^T d\zeta \\ &= \phi(L) \dot{\phi}(L)^T - \underbrace{\phi(0) \dot{\phi}(0)^T}_{=0} - \dot{\phi}(L) \phi(L)^T + \underbrace{\phi(0) \phi(0)^T}_{=0} + \int_0^L \ddot{\phi}(\zeta) \phi(\zeta)^T d\zeta \\ &= \phi(L) \dot{\phi}(L)^T - \dot{\phi}(L) \phi(L)^T + \int_0^L \ddot{\phi}(\zeta) \phi(\zeta)^T d\zeta = D \end{aligned}$$

On continue avec ça en remplaçant dans l'équation 2 : $\Rightarrow \boxed{E \dot{x}_{1d} = D e_{2d}}$

Puis on a dans la deuxième ligne de l'équation 1 :

$$\begin{aligned} \phi^T(\zeta) \dot{x}_{2d} &= -\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} (\phi(\zeta)^T e_{1d}) - q(\zeta, t) \\ \int_0^L \phi^T(\zeta) d\zeta \times \dot{x}_{2d} &= -e_{1d} \int_0^L \phi(\zeta) \ddot{\phi}(\zeta)^T d\zeta - \underbrace{\int_0^L \phi(\zeta) q(\zeta, t) d\zeta}_{=F_{ext}} \end{aligned}$$

Puis on trouve D :

$$\begin{aligned} D &= \phi(L) \dot{\phi}(L)^T - \phi(L) \dot{\phi}(L)^T + \int_0^L \ddot{\phi}(\zeta) \phi(\zeta)^T d\zeta \\ \Rightarrow D^T &= \dot{\phi}(L) \phi(L)^T - \dot{\phi}(L) \phi(L)^T + \int_0^L \phi(\zeta) \ddot{\phi}(\zeta) d\zeta \\ \Rightarrow \boxed{\int_0^L \underbrace{\phi(\zeta) \ddot{\phi}(\zeta)^T}_{=0} d\zeta} &= D^T - \dot{\phi}(L) \phi(L)^T + \phi(L) \dot{\phi}(L)^T \\ \Rightarrow E \dot{x}_{2d} &= -e_{1d} D^T + \underbrace{e_{1d} \dot{\phi}(L) \phi(L)^T}_{=0} - e_{1d} \phi(L) \dot{\phi}(L)^T - F_{ext} \end{aligned}$$

Or on sait que :

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{de_1}{d\zeta} = u(t) \Rightarrow \dot{\phi}(L)^T e_{1d} = u(t) \\ e_1(L, t) = 0 \Rightarrow \phi(L)^T e_{1d} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{E\dot{x}_{2d} = -e_{1d}D^T - \phi(L)u(t) - F_{ext}}$$

Puis on a ceci :

$$\begin{cases} y(t) = -e_2(L, t) \\ e_2(L, t) \approx \phi(L)^T e_{2d} \end{cases} \Rightarrow \boxed{y(t) = -\phi(L)^T e_{2d}}$$

5.2 Question 3

On a :

$$\begin{cases} e_1 = EI x_1 = x_1 \Rightarrow e_{1d} = x_{1d} \\ e_2 = \frac{1}{\rho(\zeta)} x_2 = x_2 \Rightarrow e_{2d} = x_{2d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E\dot{X}_{1d} = D x_{2d} \\ E\dot{X}_{2d} = -D^T x_{1d} - \phi(L)u(t) - 0 \\ y = -\phi(L)^T x_{2d} \end{cases}$$

Ce qui nous donne :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E^{-1}D \\ -E^{-1}D^T & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ -E^{-1}\phi(L) \end{pmatrix}, C = (0 \quad -\phi(L)^T), \text{ pour } \begin{cases} \zeta = L = 1 \\ \phi(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Puis application numérique.



INSA TOULOUSE

135 avenue de Rangueil
31400 Toulouse

Tel : +33 (0)5 61 55 95 13

www.insa-toulouse.fr

