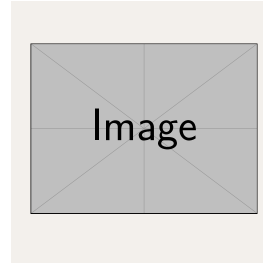
INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE



BE COMMANDE NUMERIQUE

Brage JOHNSEN
Gabriela DONZELLI
Thibaut ALETRUT
Département GEI
4A-AE

INTITULE ICI - EXEMPLE : CONTRIBUTION A LA CONCEPTION A BAS COUT D'ANTENNES 3D

Lieu du Projet de Fin d'Études ou stage
Nom de l'entreprise
Adresse de l'entreprise

Tuteur du Projet (ou PFE)...
Prénom NOM du Tuteur du Projet de Fin d'Étude

Correspondant pédagogique INSA
Prénom NOM du Correspondant pédagogique INSA

PFE/Stage/Projet soutenu le 00/00/20XX

SOMMAIRE

Introduction **1**

1 Dynamique du système avec équations différentielles partielles **2**

1.1 Espace d'état 2

1.2 Discrétisation par éléments finis 2

INTRODUCTION

Une introduction

1 DYNAMIQUE DU SYSTÈME AVEC ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES

1.1 Espace d'état

Question 1

En considérant le modèle EDP suivant ainsi que les équations données pour e_1 et e_2 :

$$\rho(\zeta)\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\left(EI(\zeta)\frac{\partial^2\omega}{\partial \zeta^2}(\zeta,t)\right) - q(\zeta,t) \tag{1}$$

On obtient comme la représentation d'état :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1(\zeta,t)\\ e_2(\zeta,t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ -q(\zeta,t)\end{bmatrix} \tag{2}$$

1.2 Discrétisation par éléments finis

Question 2

À partir des informations données dans l'exercice, on peut écrire :

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial^2 e_2}{\partial \zeta^2} = \phi(\zeta)^T\dot{x}_{1d}(t) \tag{3}$$

En multipliant les deux membres par le vecteur d'approximation $\phi(\zeta)$, on obtient :

$$\phi(\zeta)\frac{\partial^2 e_2}{\partial \zeta^2} = \phi(\zeta)\phi(\zeta)^T\dot{x}_{1d}(t) \tag{4}$$

En remplaçant ensuite e_2 par son approximation, on obtient :

$$\phi(\zeta)\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\left(\phi(\zeta)^T e_{2d}(t)\right) = \phi(\zeta)\phi(\zeta)^T\dot{x}_{1d}(t) \tag{5}$$

Comme $e_{2d}(t)$ ne dépend pas de ζ, il peut être sorti de l'intégrale. En intégrant sur $[0, L]$, on obtient :

$$\int_0^L \phi(\zeta)\phi(\zeta)^T\, d\zeta\, \dot{x}_{1d}(t) = \int_0^L \phi(\zeta)\frac{\partial^2\phi(\zeta)^T}{\partial \zeta^2}\, d\zeta\, e_{2d}(t) \tag{6}$$

On identifie alors les matrices E et D. Ainsi, les deux équations d'état discrétisées s'écrivent :

$$\begin{aligned} E\dot{x}_{1d}(t) &= De_{2d}(t),\\ E\dot{x}_{2d}(t) &= -D^T e_{1d}(t) - \phi(L)u(t) - F_{ext}. \end{aligned} \tag{7}$$

Enfin, on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} E\dot{x}_{1d}(t) &= De_{2d}(t),\\ E\dot{x}_{2d}(t) &= -D^T e_{1d}(t) - \phi(L)u(t) - F_{ext},\\ y(t) &= -\phi(L)^T e_{2d}(t). \end{aligned}} \tag{8}$$

»»»> 10ca19c (mise a jour du rapport)

Question 3

Le système devient avec $\rho = EI = 1$ et $q(\zeta, t) = 0$:

$$\begin{aligned} E\dot{x}_{1d}(t) &= Dx_{2d}(t), \\ E\dot{x}_{2d}(t) &= -D^T x_{1d}(t) - \phi(L)u(t), \\ y(t) &= -\phi(L)^T x_{2d}(t). \end{aligned} \tag{9}$$

En multipliant les deux premières équations par E^{-1}, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1d}(t) &= E^{-1}Dx_{2d}(t), \\ \dot{x}_{2d}(t) &= -E^{-1}D^T x_{1d}(t) - E^{-1}\phi(L)u(t). \end{aligned} \tag{10}$$

En multipliant les deux premières équations par E^{-1}, on obtient comme valeurs de A, B et C :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 114 & 6 & 12 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -54 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1188 & -12 & -114 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -828 & -12 & -54 & 6 \\ 6 & 54 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -114 & -2 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -828 & -6 & 54 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -1188 & -6 & 114 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ -16 \\ -60 \\ -120 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

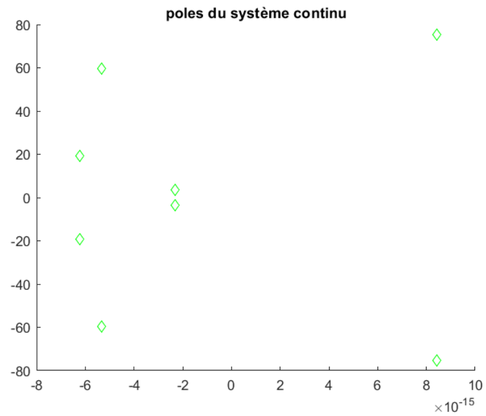
Finalement,

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_d(t) &= Ax_d(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx_d(t). \end{aligned}} \tag{13}$$

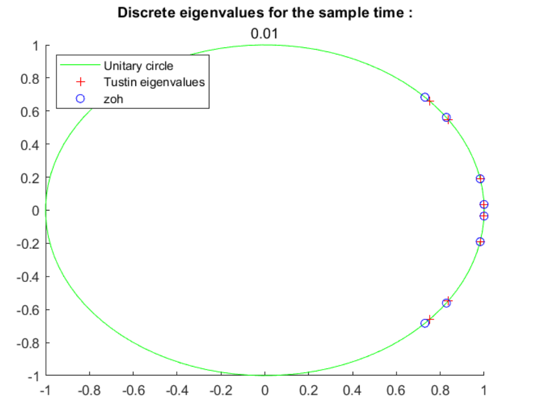
Question 4

La Figure 1a correspond aux valeurs propres en temps continu, tandis que les figures 1b, 1c et 1d montrent les valeurs propres discrètes obtenues avec les méthodes de Tustin et ZOH pour différents temps d'échantillonnage.

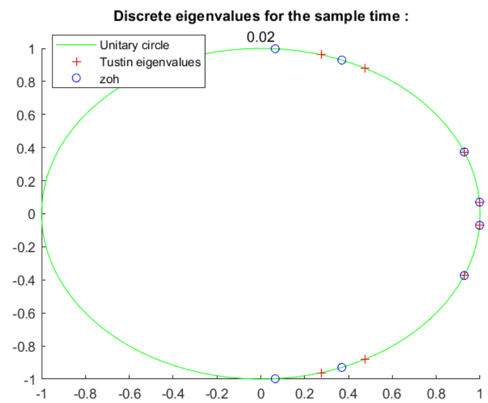
En temps continu, le système présente deux pôles à partie réelle positive, ce qui montre son instabilité. Après discrétisation, les pôles obtenus avec les méthodes de Tustin et ZOH se trouvent sur ou proches du cercle unité. Le système discret est donc à la limite de stabilité.



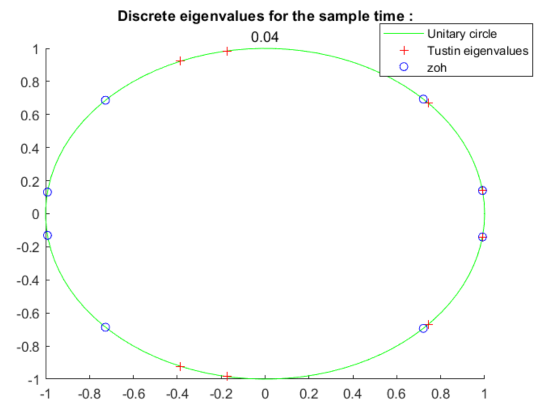
(a) Valeurs propres en temps continu.



(b) $T_s = 0{,}01\,\mathrm{s}$.



(c) $T_s = 0{,}02\,\mathrm{s}$.



(d) $T_s = 0{,}04\,\mathrm{s}$.

FIGURE 1 – Comparaison des valeurs propres du système en temps continu et en temps discret.

Question 5

La Figure 2 montre que la sortie $y(t)$ oscille après l'échelon, confirmant l'instabilité du système en boucle ouverte.

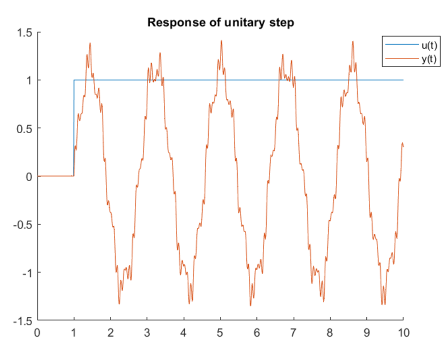


FIGURE 2 – Response du système en boucle ouverte.

INSA TOULOUSE
135 avenue de Rangueil
31400 Toulouse

Tel : +33 (0)5 61 55 95 13
www.insa-toulouse.fr