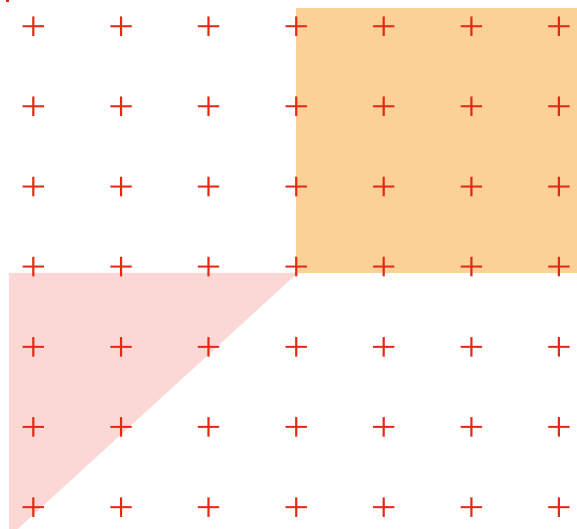


BE COMMANDE NUMERIQUE

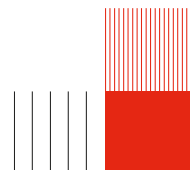
Brage JOHNSEN
Gabriela DONZELLI
Thibaut ALETRUT
Département GEI
4A-AE

**Bureau d'étude : DIGITAL CONTROL
OF A CANTILEVER BEAM**



SOMMAIRE

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Modélisation du système | 1 |
| 1.1 | Dynamique avec EDP | 1 |
| 1.2 | Discretisation par éléments finis | 1 |
| 2 | Retour de sortie | 4 |
| 2.1 | Retour de sortie par ZOH | 4 |
| 3 | Retour d'état | 5 |
| 3.1 | Retour d'état par ZOH | 6 |
| 4 | Rejet de perturbation | 7 |
| 4.1 | Remplacement du pré-gain H | 7 |



1 MODÉLISATION DU SYSTÈME

1.1 Dynamique avec EDP

Question 1

A partir des equations differentielles partielles nous avons retrouvé l'espace d'état sous cette forme :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(\zeta, t) \\ e_2(\zeta, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -q(\zeta, t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

1.2 Discrétisation par éléments finis

Question 2

À partir des informations données dans l'exercice, on peut écrire :

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial^2 e_2}{\partial \zeta^2} = \phi(\zeta)^T \dot{x}_{1d}(t) \quad (2)$$

En multipliant les deux membres par le vecteur d'approximation $\phi(\zeta)$, on obtient :

$$\phi(\zeta) \frac{\partial^2 e_2}{\partial \zeta^2} = \phi(\zeta) \phi(\zeta)^T \dot{x}_{1d}(t) \quad (3)$$

En remplaçant ensuite e_2 par son approximation, on obtient :

$$\phi(\zeta) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} (\phi(\zeta)^T e_{2d}(t)) = \phi(\zeta) \phi(\zeta)^T \dot{x}_{1d}(t) \quad (4)$$

Comme $e_{2d}(t)$ ne dépend pas de ζ , il peut être sorti de l'intégrale. En intégrant sur $[0, L]$, on obtient :

$$\int_0^L \phi(\zeta) \phi(\zeta)^T d\zeta \dot{x}_{1d}(t) = \int_0^L \phi(\zeta) \frac{\partial^2 \phi(\zeta)^T}{\partial \zeta^2} d\zeta e_{2d}(t) \quad (5)$$

Après avoir fait une integration par partie : à inserer :

On identifie alors les matrices E et D . Ainsi, les deux équations d'état discrétisées s'écrivent :

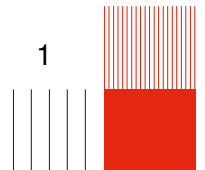
$$\begin{aligned} E \dot{x}_{1d}(t) &= D e_{2d}(t), \\ E \dot{x}_{2d}(t) &= -D^T e_{1d}(t) - \phi(L) u(t) - F_{ext}. \end{aligned} \quad (6)$$

Enfin, on obtient :

$$\begin{aligned} E \dot{x}_{1d}(t) &= D e_{2d}(t), \\ E \dot{x}_{2d}(t) &= -D^T e_{1d}(t) - \phi(L) u(t) - F_{ext}, \\ y(t) &= -\phi(L)^T e_{2d}(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Question 3

Le système devient avec $\rho = EI = 1$ et $q(\zeta, t) = 0$:



$$\begin{aligned}
E\dot{x}_{1d}(t) &= Dx_{2d}(t), \\
E\dot{x}_{2d}(t) &= -D^T x_{1d}(t) - \phi(L)u(t), \\
y(t) &= -\phi(L)^T x_{2d}(t).
\end{aligned} \tag{8}$$

En multipliant les deux premières équations par E^{-1} , on obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{1d}(t) &= E^{-1}Dx_{2d}(t), \\
\dot{x}_{2d}(t) &= -E^{-1}D^T x_{1d}(t) - E^{-1}\phi(L)u(t).
\end{aligned} \tag{9}$$

Et, on obtient comme valeurs de A , B et C :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & E^{-1}D \\ -E^{-1}D^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 114 & 6 & 12 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -54 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1188 & -12 & -114 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -828 & -12 & -54 & 6 \\ 6 & 54 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -114 & -2 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -828 & -6 & 54 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -1188 & -6 & 114 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -E^{-1}\Phi(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ -16 \\ -60 \\ -120 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad -\Phi^T(L, t)] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0] \tag{11}$$

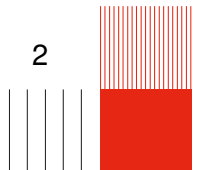
Finalement,

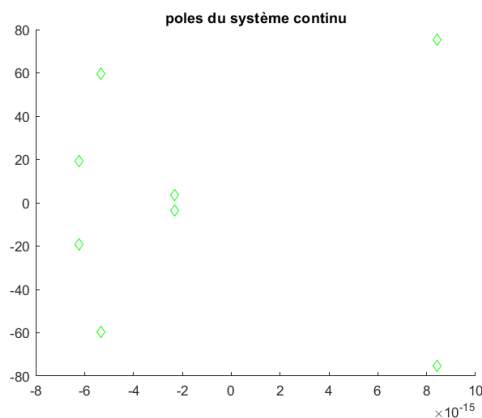
$$\boxed{
\begin{aligned}
\dot{x}_d(t) &= Ax_d(t) + Bu(t), \\
y(t) &= Cx_d(t).
\end{aligned}
} \tag{12}$$

Question 4

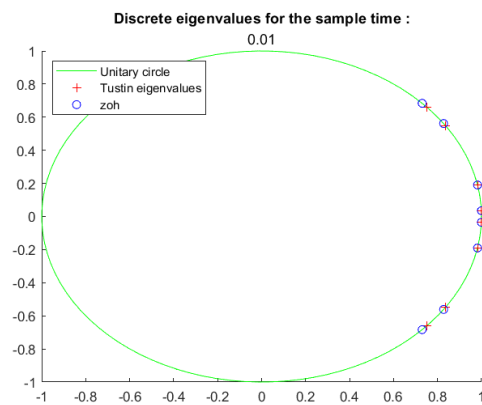
La Figure 1a correspond aux valeurs propres en temps continu, tandis que les figures 1b, 1c et 1d montrent les valeurs propres discrètes obtenues avec les méthodes de Tustin et ZOH pour différents temps d'échantillonnage.

En temps continu, le système présente deux pôles à partie réelle positive, ce qui montre son instabilité. Après discrétisation, les pôles obtenus avec les méthodes de Tustin et ZOH se trouvent sur ou proches du cercle unité. Comme tous nos pôles sont à $|z| = 1$, nous ne pouvons pas conclure sur la stabilité ni l'instabilité.

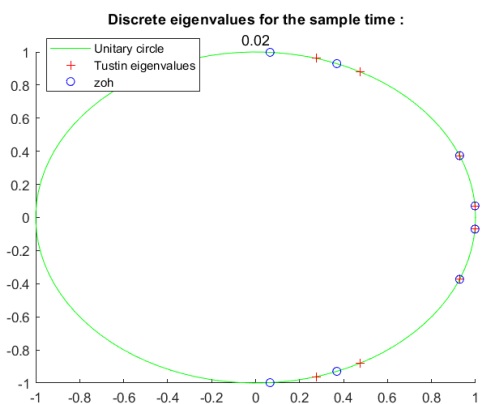




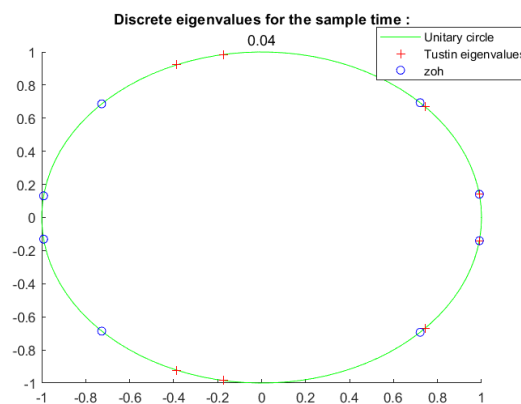
(a) Valeurs propres en temps continu.



(b) $T_s = 0,01$ s.



(c) $T_s = 0,02$ s.



(d) $T_s = 0,04$ s.

FIGURE 1 – Comparaison des valeurs propres du système en temps continu et en temps discret.

Question 5

La Figure 2 montre que la sortie $y(t)$ oscille après l'échelon, confirmant l'instabilité du système en boucle ouverte.

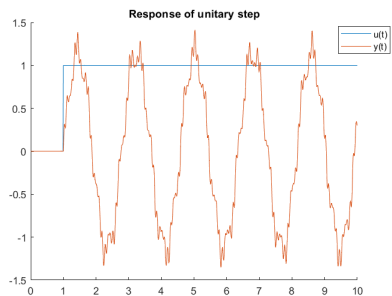
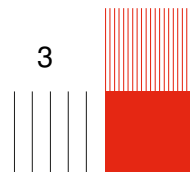


FIGURE 2 – Response du système en boucle ouverte.



Question 6

:0

2 RETOUR DE SORTIE

Question 7

Nous avons implémenté la loi de commande : $u(t) = -Ky(t) + Hy_c(t)$ Nous avons utilisé une boucle `for` sous MATLAB afin de tester les valeurs de k entre 0 e 100.

Le gain H est ensuite calculé à partir d'un système en boucle fermée sous la forme :

$$H = -\frac{1}{C(A-BKC)^{-1}B}$$

Ainsi, les valeurs retenues pour la commande en boucle fermée sont : **K = 1.85 & H = -3**

Question 8

La Figure 3 montre que $w(L, t)$ suit la consigne $w_c(t)$ unitaire, avec une erreur nulle en régime permanent, et un temps caractéristique à $\tau = 1s$.

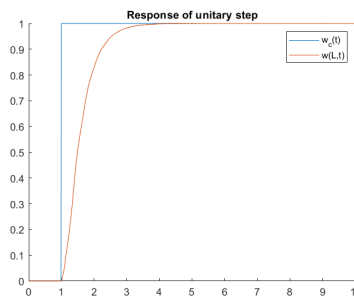
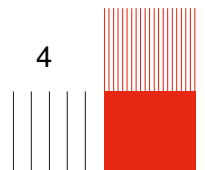


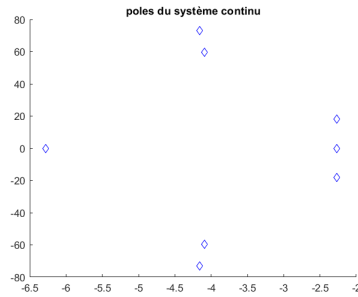
FIGURE 3 – Suivi de la consigne $w_c(t)$ par la position $w(L, t)$.

2.1 Retour de sortie par ZOH

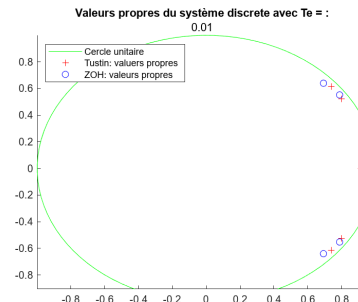
Question 9

La Figure ?? compare les valeurs propres du système en boucle fermée en temps continu avec celles obtenues après discrétisation par ZOH, pour les trois périodes d'échantillonnage proposées : $T_e = \{0.01s; 0.02s; 0.04s\}$.

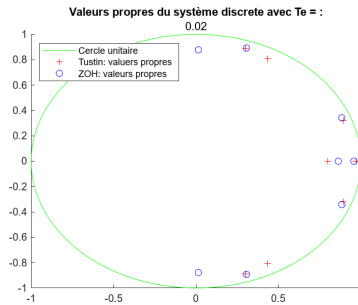




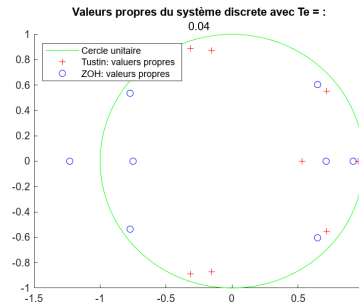
(a) Valeurs propres en temps continu.



(b) $T_s = 0.01$ s.



(c) $T_s = 0.02$ s.

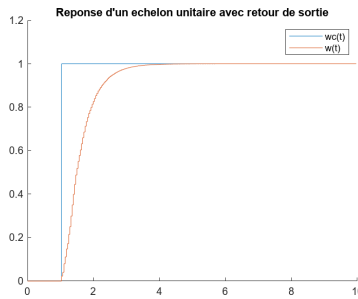


(d) $T_s = 0.04$ s.

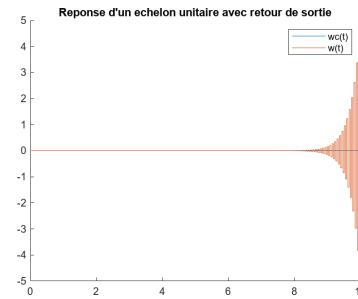
Comme nous pouvons voir, les pôles du système discret restent à l'intérieur du cercle unitaire, mais dès que nous passons à $T_e = 0.04$ s ça rend le système instable avec un pôle hors le cercle.

Question 10

Nous avons trouvé un seuil de $T_s = 0.0356$ s à l'aide d'un boucle qui traverse les différents périodes d'échantillonnage.



(a) Système au seuil : $T_s = 0.0356$ s



(b) Système hors seuil : $T_s = 0.0366$ s

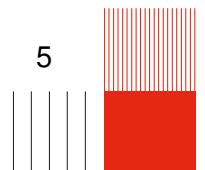
3 RETOUR D'ÉTAT

Question 11

Avec la fonction `lqr` de MATLAB, le gain de retour d'état obtenu est :

$$K = [0.97 \quad -14.62 \quad 0.66 \quad 1.32 \quad 19.32 \quad 0.39 \quad 2.40 \quad -2.11] \quad (13)$$

Question 12



La Figure 6 montre que le système en boucle fermée suit correctement la référence avec un léger dépassement et converge vers la consigne en régime permanent.

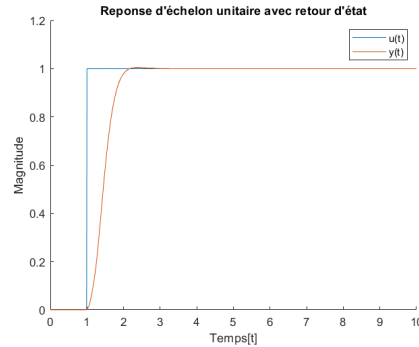


FIGURE 6 – Simulation numérique du système continu en boucle fermée.

3.1 Retour d'état par ZOH

Question 13

Avec le même période d'échantillonnage comme dans la section précédente : $T_e = 0.0356$ notre système est rendu instable.

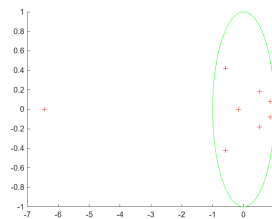
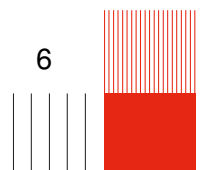
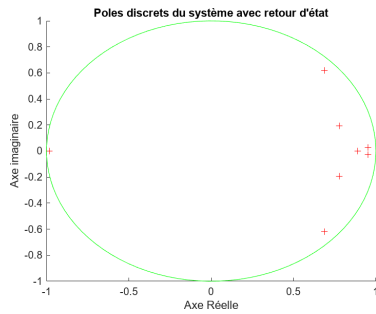


FIGURE 7 – Pôles du système avec temps d'échantillonnage : $T_e = 0.0356$

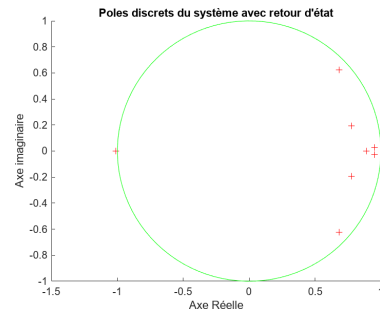
Question 14

Nous retrouvons un seuil d'échantillonnage à : $T_e = 0.0107s$. Voici les comportements du système dedans et hors seuil.

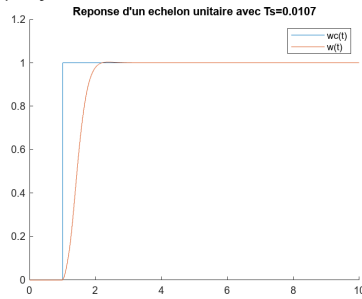




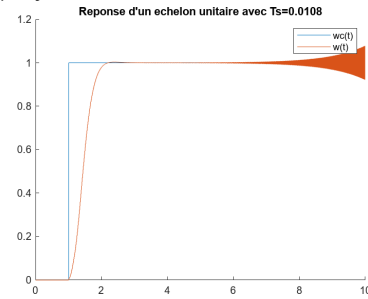
(a) Système au seuil : $T_s = 0.0107s$



(b) Système hors seuil : $T_s = 0.0108s$



(c) Reponse à un echelon unitaire : $T_s = 0.0107s$



(d) Reponse à un echelon unitaire : $T_s = 0.0108s$

4 REJET DE PERTURBATION

Question 15 Après avoir calculé, nous retrouvons la matrice B_p sous la forme :

$$B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -E^{-1} \int_0^L \Phi(\zeta) d\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (14)$$

Question 16

La Figure 9 montre que le système ne corrige pas l'erreur due à la perturbation.

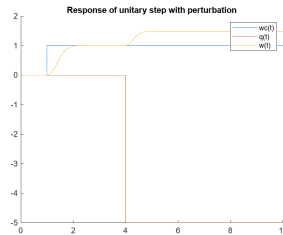


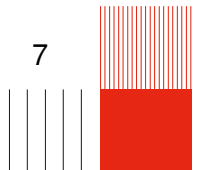
FIGURE 9 – Simulation du système avec une perturbation.

Pour résoudre ce problème, il faudra ajouter une action intégrale.

4.1 Remplacement du pré-gain H

Question 17

À partir des huit pôles obtenus avec la commande par retour d'état de la Question 11, on ajoute un pôle supplémentaire associé à l'action intégrale $p_i = -4,3805$, correspondant au pôle du système le plus rapide. Ainsi, les pôles désirés du système augmenté sont :



$$p_{des} = \begin{bmatrix} -85 & -8 + 69i & -8 - 69i & -28 + 17i & -28 - 17i & -16 & -4 + 3i & -4 - 3i & -4 \end{bmatrix}^T \quad (15)$$

$$p_{des} = \begin{bmatrix} -84.6647 \\ -7.5585 + 68.7669i \\ -7.5585 - 68.7669i \\ -27.9691 + 17.2408i \\ -27.9691 - 17.2408i \\ -15.9108 \\ -4.3805 + 2.6626i \\ -4.3805 - 2.6626i \\ -4.3805 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Question 18

En utilisant la fonction `place` sous MATLAB, nous avons calculé les gains K_1 et K_i à partir du système augmenté :

$$K_{Aug} = [K_1 \quad K_i] \quad (17)$$

$$K_1 = [-3.1081 \quad -18.9367 \quad -0.1707 \quad 2.1192 \quad 19.4677 \quad -2.3049 \quad 2.3377 \quad -1.7524] \quad (18)$$

$$K_i = [26.2831] \quad (19)$$

Question 19

La Figure 10 montre qu'avec l'action intégrale, la perturbation est rejetée et l'erreur en régime permanent est corrigée.

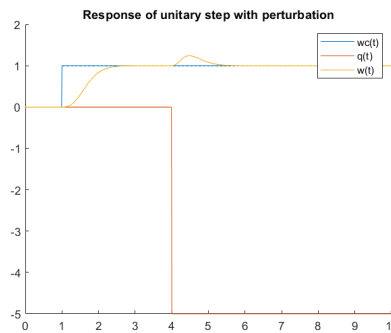
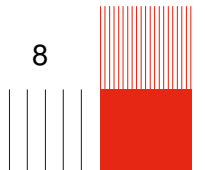


FIGURE 10 – Simulation du système avec correction par action intégrale.

Question 20

Nous avons testé avec 6 decimals, mais la valeur absolue d'un des pôles $z : |z| > 1$, alors nous n'arrivons jamais à stabiliser le système. Aussi, nous considérons avec $T_s \rightarrow 0.00001$ est un temps continu, la commande n'est pas implemantable sur un controleur numérique.





INSA TOULOUSE

135 avenue de Rangueil
31400 Toulouse

Tel : +33 (0)5 61 55 95 13

www.insa-toulouse.fr

