

## BE COMMANDE NUMERIQUE

**Brage JOHNSEN**  
**Gabriela DONZELLI**  
**Thibaut ALETRUT**  
Département GEI  
4A-AE

**INTITULE ICI - EXEMPLE : CONTRIBUTION A LA  
CONCEPTION A BAS COUT D'ANTENNES 3D**

**Lieu du Projet de Fin d'Études ou stage**

Nom de l'entreprise

Adresse de l'entreprise

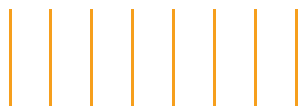
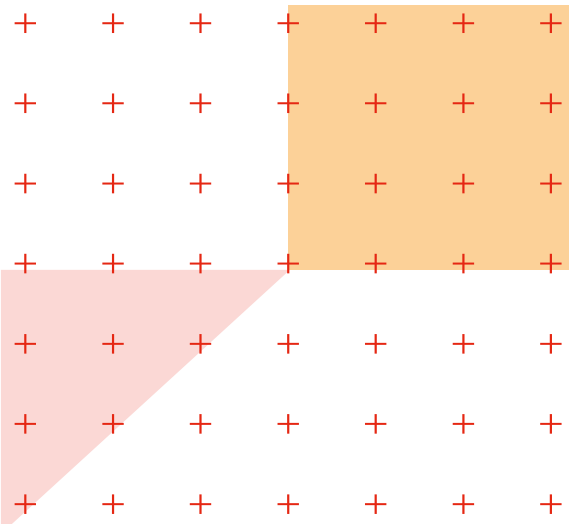
**Tuteur du Projet (ou PFE)...**

Prénom NOM du Tuteur du Projet de Fin d'Étude

**Correspondant pédagogique INSA**

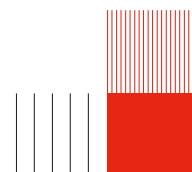
Prénom NOM du Correspondant pédagogique INSA

**PFE/Stage/Projet soutenu le 00/00/20XX**



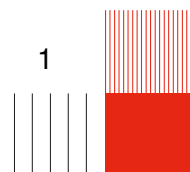
# SOMMAIRE

Introduction	1
<b>1 Dynamique du système avec équations différentielles partielles</b>	<b>2</b>
1.1 Espace d'état . . . . .	2
1.2 Discrétisation par éléments finis . . . . .	2



# INTRODUCTION

Une introduction



# 1 DYNAMIQUE DU SYSTÈME AVEC ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES

## 1.1 Espace d'état

### Question 1

En considérant le modèle EDP suivant ainsi que les équations données pour  $e_1$  et  $e_2$  :

$$\rho(\zeta) \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left( EI(\zeta) \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2}(\zeta, t) \right) - q(\zeta, t) \quad (1)$$

On obtient comme la représentation d'état :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(\zeta, t) \\ e_2(\zeta, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -q(\zeta, t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

## 1.2 Discrétisation par éléments finis

### Question 2

À partir des informations données dans l'exercice, on peut écrire :

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial^2 e_2}{\partial \zeta^2} = \phi(\zeta)^T \dot{x}_{1d}(t) \quad (3)$$

En multipliant les deux membres par le vecteur d'approximation  $\phi(\zeta)$ , on obtient :

$$\phi(\zeta) \frac{\partial^2 e_2}{\partial \zeta^2} = \phi(\zeta) \phi(\zeta)^T \dot{x}_{1d}(t) \quad (4)$$

En remplaçant ensuite  $e_2$  par son approximation, on obtient :

$$\phi(\zeta) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} (\phi(\zeta)^T e_{2d}(t)) = \phi(\zeta) \phi(\zeta)^T \dot{x}_{1d}(t) \quad (5)$$

Comme  $e_{2d}(t)$  ne dépend pas de  $\zeta$ , il peut être sorti de l'intégrale. En intégrant sur  $[0, L]$ , on obtient :

$$\int_0^L \phi(\zeta) \phi(\zeta)^T d\zeta \dot{x}_{1d}(t) = \int_0^L \phi(\zeta) \frac{\partial^2 \phi(\zeta)^T}{\partial \zeta^2} d\zeta e_{2d}(t) \quad (6)$$

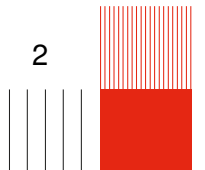
On identifie alors les matrices  $E$  et  $D$ . Ainsi, les deux équations d'état discrétisées s'écrivent :

$$\begin{aligned} E \dot{x}_{1d}(t) &= D e_{2d}(t), \\ E \dot{x}_{2d}(t) &= -D^T e_{1d}(t) - \phi(L) u(t) - F_{ext}. \end{aligned} \quad (7)$$

Enfin, on obtient :

$$\begin{aligned} E \dot{x}_{1d}(t) &= D e_{2d}(t), \\ E \dot{x}_{2d}(t) &= -D^T e_{1d}(t) - \phi(L) u(t) - F_{ext}, \\ y(t) &= -\phi(L)^T e_{2d}(t). \end{aligned}$$

(8)



### Question 3

Le système devient avec  $\rho = EI = 1$  et  $q(\zeta, t) = 0$  :

$$\begin{aligned} E\dot{x}_{1d}(t) &= Dx_{2d}(t), \\ E\dot{x}_{2d}(t) &= -D^T x_{1d}(t) - \phi(L)u(t), \\ y(t) &= -\phi(L)^T x_{2d}(t). \end{aligned} \quad (9)$$

En multipliant les deux premières équations par  $E^{-1}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1d}(t) &= E^{-1}Dx_{2d}(t), \\ \dot{x}_{2d}(t) &= -E^{-1}D^T x_{1d}(t) - E^{-1}\phi(L)u(t). \end{aligned} \quad (10)$$

En multipliant les deux premières équations par  $E^{-1}$ , on obtient comme valeurs de  $A$ ,  $B$  et  $C$  :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 114 & 6 & 12 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -54 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1188 & -12 & -114 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -828 & -12 & -54 & 6 \\ 6 & 54 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -114 & -2 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -828 & -6 & 54 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -1188 & -6 & 114 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ -16 \\ -60 \\ -120 \end{bmatrix} \quad C = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0] \quad (12)$$

Finalement,

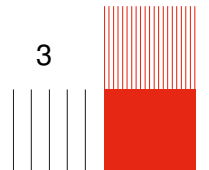
$$\begin{aligned} \dot{x}_d(t) &= Ax_d(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx_d(t). \end{aligned}$$

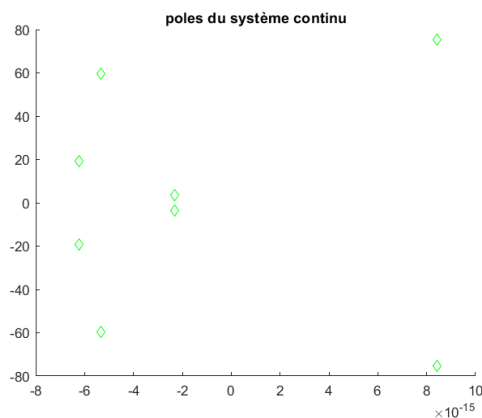
 (13)

### Question 4

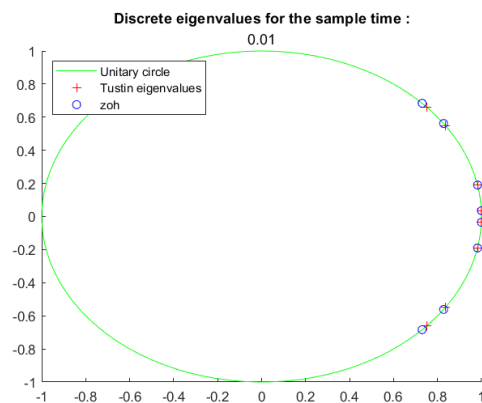
La Figure 1a correspond aux valeurs propres en temps continu, tandis que les figures 1b, 1c et 1d montrent les valeurs propres discrètes obtenues avec les méthodes de Tustin et ZOH pour différents temps d'échantillonnage.

En temps continu, le système présente deux pôles à partie réelle positive, ce qui montre son instabilité. Après discrétisation, les pôles obtenus avec les méthodes de Tustin et ZOH se trouvent sur ou proches du cercle unité. Le système discret est donc à la limite de stabilité.

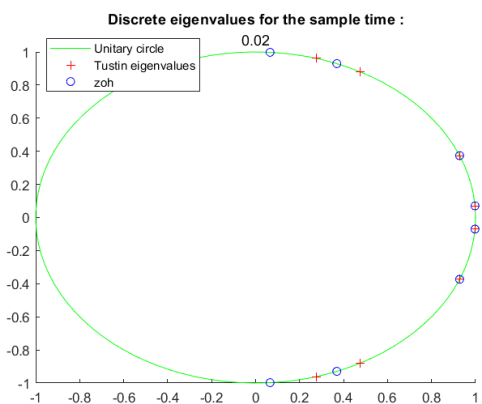




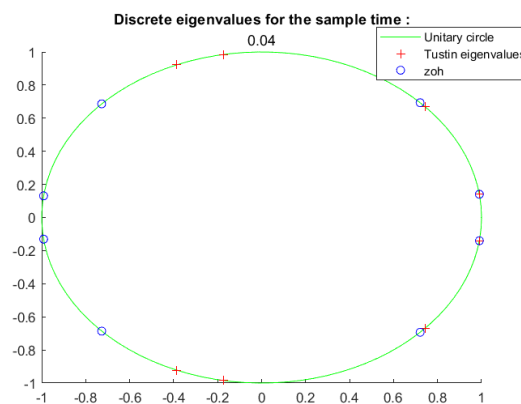
(a) Valeurs propres en temps continu.



(b)  $T_s = 0,01$  s.



(c)  $T_s = 0,02$  s.



(d)  $T_s = 0,04$  s.

FIGURE 1 – Comparaison des valeurs propres du système en temps continu et en temps discret.

### Question 5

La Figure 2 montre que la sortie  $y(t)$  oscille après l'échelon, confirmant l'instabilité du système en boucle ouverte.

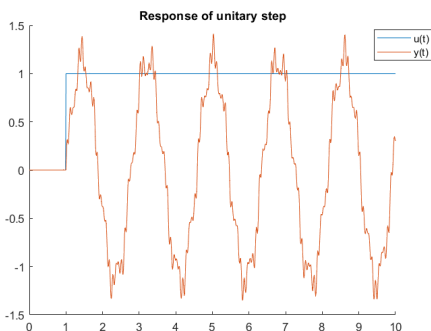
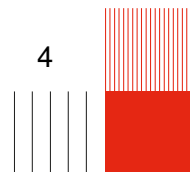


FIGURE 2 – Response du système en boucle ouverte.



### Question 7

Nous avons utilisé une boucle `for` sous MATLAB afin de tester les valeurs de  $k$  entre 0 et 100.

Le gain  $H$  est ensuite calculé à partir d'un système en boucle fermée de la forme :

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + BHr(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad (14)$$

on impose que, en régime permanent, la sortie suive la consigne. On utilise donc :

$$H = -\frac{1}{C(A - BK)^{-1}B}. \quad (15)$$

Ainsi, les valeurs retenues pour la commande en boucle fermée sont :

$$\boxed{k = 1,85, \quad H = -3.} \quad (16)$$

### Question 8

La figure montre que  $w(L, t)$  suit la consigne  $w_c(t)$  et converge vers 1, avec une erreur nulle en régime permanent.

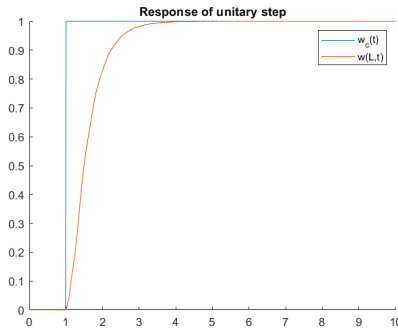
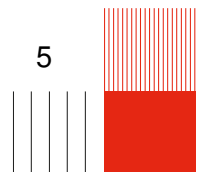


FIGURE 3 – Suivi de la consigne  $w_c(t)$  par la position  $w(L, t)$ .



### Question 9

REWRITE

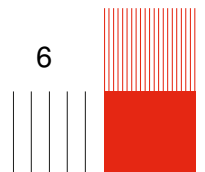
(a) Valeurs propres en temps continu.

(b)  $T_s = 0,01$  s.

(c)  $T_s = 0,02$  s.

(d)  $T_s = 0,04$  s.

FIGURE 4 – Comparaison des valeurs propres du système en boucle fermée.







## **INSA TOULOUSE**

135 avenue de Rangueil  
31400 Toulouse

Tel : +33 (0)5 61 55 95 13

**[www.insa-toulouse.fr](http://www.insa-toulouse.fr)**

