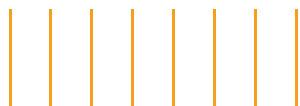
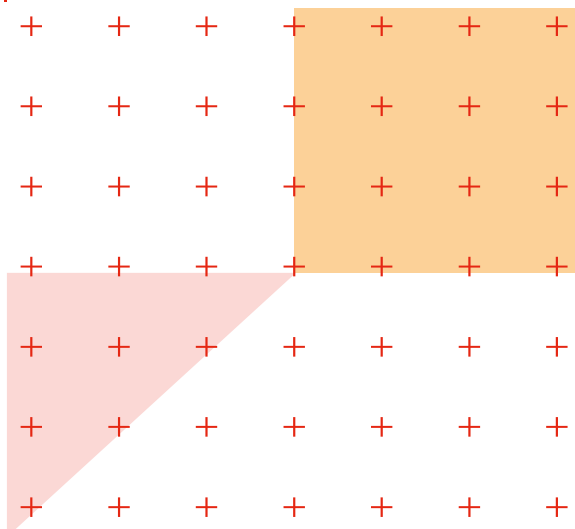


BE COMMANDE NUMERIQUE

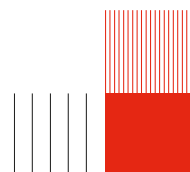
Brage JOHNSEN
Gabriela DONZELLI
Thibaut ALETRUT
Département GEI
4A-AE

**Bureau d'étude : DIGITAL CONTROL
OF A CANTILEVER BEAM**



SOMMAIRE

1	Modélisation du système	1
1.1	Dynamique avec EDP	1
1.2	Discretisation par éléments finis	1
2	Retour de sortie	4
2.1	Retour de sortie par ZOH	4
3	Retour d'état	5
3.1	Retour d'état par ZOH	6
4	Rejet de perturbation	7
4.1	Remplacement du pré-gain H	7



1 MODÉLISATION DU SYSTÈME

1.1 Dynamique avec EDP

Question 1

En considérant le modèle EDP suivant ainsi que les équations données pour e_1 et e_2 :

$$\rho(\zeta) \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left(EI(\zeta) \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2}(\zeta, t) \right) - q(\zeta, t) \quad (1)$$

On obtient comme la représentation d'état :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(\zeta, t) \\ e_2(\zeta, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -q(\zeta, t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

1.2 Discrétisation par éléments finis

Question 2

À partir des informations données dans l'exercice, on peut écrire :

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial^2 e_2}{\partial \zeta^2} = \phi(\zeta)^T \dot{x}_{1d}(t) \quad (3)$$

En multipliant les deux membres par le vecteur d'approximation $\phi(\zeta)$, on obtient :

$$\phi(\zeta) \frac{\partial^2 e_2}{\partial \zeta^2} = \phi(\zeta) \phi(\zeta)^T \dot{x}_{1d}(t) \quad (4)$$

En remplaçant ensuite e_2 par son approximation, on obtient :

$$\phi(\zeta) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} (\phi(\zeta)^T e_{2d}(t)) = \phi(\zeta) \phi(\zeta)^T \dot{x}_{1d}(t) \quad (5)$$

Comme $e_{2d}(t)$ ne dépend pas de ζ , il peut être sorti de l'intégrale. En intégrant sur $[0, L]$, on obtient :

$$\int_0^L \phi(\zeta) \phi(\zeta)^T d\zeta \dot{x}_{1d}(t) = \int_0^L \phi(\zeta) \frac{\partial^2 \phi(\zeta)^T}{\partial \zeta^2} d\zeta e_{2d}(t) \quad (6)$$

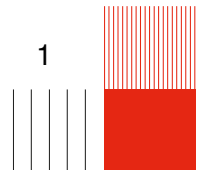
On identifie alors les matrices E et D . Ainsi, les deux équations d'état discrétisées s'écrivent :

$$\begin{aligned} E \dot{x}_{1d}(t) &= D e_{2d}(t), \\ E \dot{x}_{2d}(t) &= -D^T e_{1d}(t) - \phi(L)u(t) - F_{ext}. \end{aligned} \quad (7)$$

Enfin, on obtient :

$$\begin{aligned} E \dot{x}_{1d}(t) &= D e_{2d}(t), \\ E \dot{x}_{2d}(t) &= -D^T e_{1d}(t) - \phi(L)u(t) - F_{ext}, \\ y(t) &= -\phi(L)^T e_{2d}(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Question 3



Le système devient avec $\rho = EI = 1$ et $q(\zeta, t) = 0$:

$$\begin{aligned} E\dot{x}_{1d}(t) &= Dx_{2d}(t), \\ E\dot{x}_{2d}(t) &= -D^T x_{1d}(t) - \phi(L)u(t), \\ y(t) &= -\phi(L)^T x_{2d}(t). \end{aligned} \quad (9)$$

En multipliant les deux premières équations par E^{-1} , on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1d}(t) &= E^{-1}Dx_{2d}(t), \\ \dot{x}_{2d}(t) &= -E^{-1}D^T x_{1d}(t) - E^{-1}\phi(L)u(t). \end{aligned} \quad (10)$$

Et, on obtient comme valeurs de A , B et C :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 114 & 6 & 12 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -54 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1188 & -12 & -114 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -828 & -12 & -54 & 6 \\ 6 & 54 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -114 & -2 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -828 & -6 & 54 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -1188 & -6 & 114 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ -16 \\ -60 \\ -120 \end{bmatrix} \quad C = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0] \quad (12)$$

Finalement,

$$\begin{cases} \dot{x}_d(t) = Ax_d(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx_d(t). \end{cases} \quad (13)$$

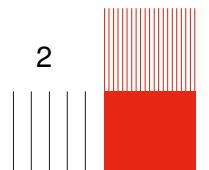
Question 4

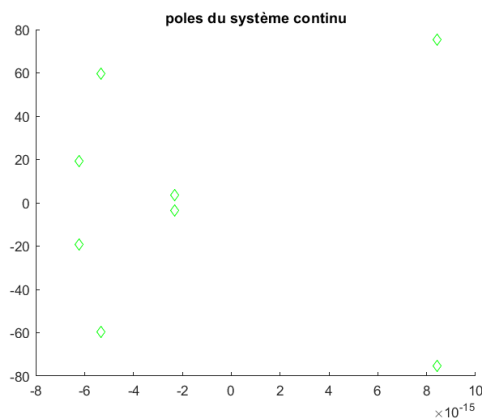
La Figure 1a correspond aux valeurs propres en temps continu, tandis que les figures 1b, 1c et 1d montrent les valeurs propres discrètes obtenues avec les méthodes de Tustin et ZOH pour différents temps d'échantillonnage.

En temps continu, le système présente deux pôles à partie réelle positive, ce qui montre son instabilité. Après discrétisation, les pôles obtenus avec les méthodes de Tustin et ZOH se trouvent sur ou proches du cercle unité. Le système discret est donc à la limite de stabilité.

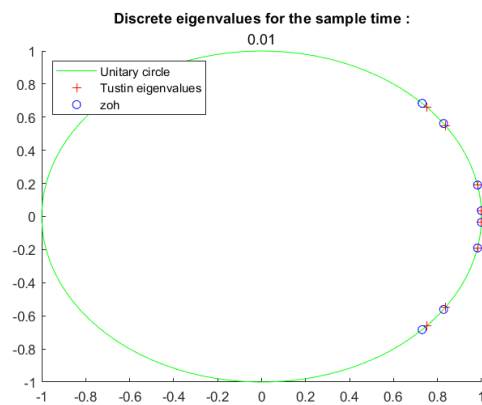
Question 5

La Figure 2 montre que la sortie $y(t)$ oscille après l'échelon, confirmant l'instabilité du système en boucle ouverte.

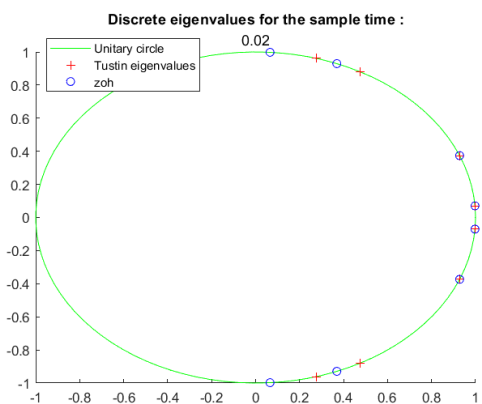




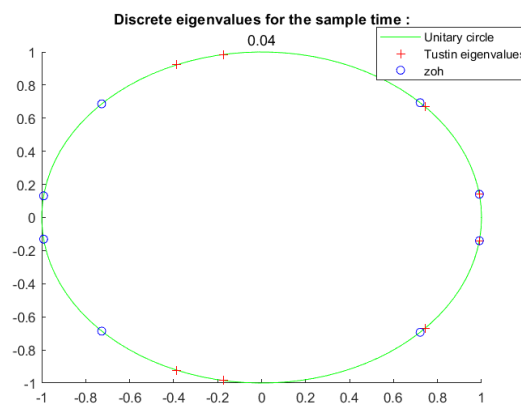
(a) Valeurs propres en temps continu.



(b) $T_s = 0,01$ s.



(c) $T_s = 0,02$ s.



(d) $T_s = 0,04$ s.

FIGURE 1 – Comparaison des valeurs propres du système en temps continu et en temps discret.

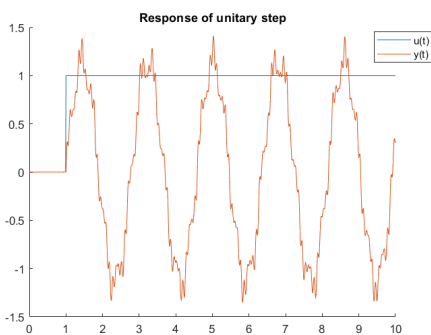
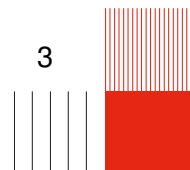


FIGURE 2 – Response du système en boucle ouverte.

Question 6

:0



2 RETOUR DE SORTIE

Question 7

Nous avons utilisé une boucle `for` sous MATLAB afin de tester les valeurs de k entre 0 et 100.

Le gain H est ensuite calculé à partir d'un système en boucle fermée de la forme :

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + BHr(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad (14)$$

on impose que, en régime permanent, la sortie suive la consigne. On utilise donc :

$$H = -\frac{1}{C(A - BK)^{-1}B}. \quad (15)$$

Ainsi, les valeurs retenues pour la commande en boucle fermée sont :

$$k = 1,85, \quad H = -3. \quad (16)$$

Question 8

La figure montre que $w(L, t)$ suit la consigne $w_c(t)$ et converge vers 1, avec une erreur nulle en régime permanent.

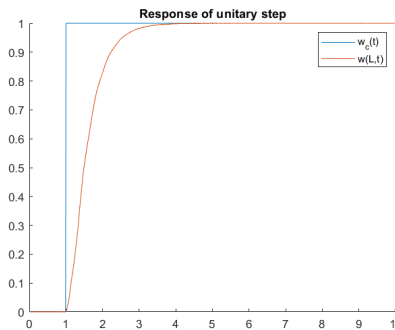
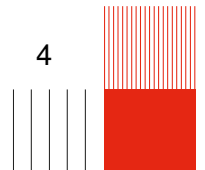


FIGURE 3 – Suivi de la consigne $w_c(t)$ par la position $w(L, t)$.

2.1 Retour de sortie par ZOH



Question 9

La Figure 4 compare les valeurs propres du système en boucle fermée en temps continu avec celles obtenues après discrétisation par ZOH, pour les trois périodes d'échantillonnage proposées.

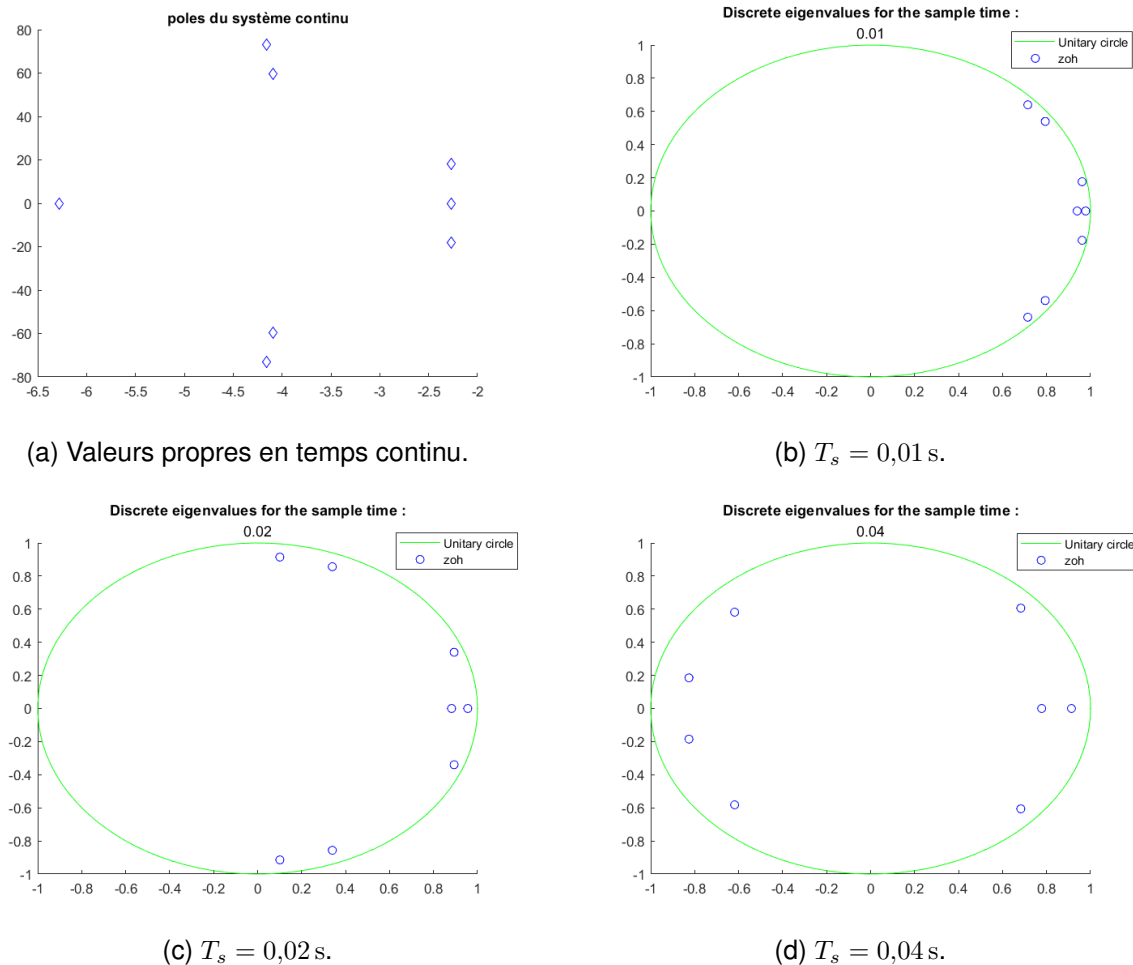


FIGURE 4 – Comparaison des valeurs propres du système en boucle fermée.

Les pôles discrets restent à l'intérieur du cercle unité pour les trois valeurs de T_s , ce qui montre que le système discret reste stable.

Question 10

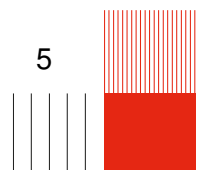
Nous avons obtenu une valeur maximale de 0,5 s pour la période d'échantillonnage.
Manque l'image!!!!!!!!!!!!!!

3 RETOUR D'ÉTAT

Question 11

Avec la fonction `lqr` de MATLAB, le gain de retour d'état obtenu est :

$$K = [0,97 \quad -14,62 \quad 0,66 \quad 1,32 \quad 19,32 \quad 0,39 \quad 2,40 \quad -2,11] \quad (17)$$



Question 12

La Figure 5 montre que le système en boucle fermée suit correctement la référence et converge vers la consigne en régime permanent.

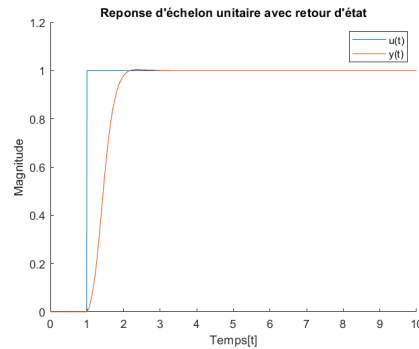


FIGURE 5 – Simulation numérique du système continu en boucle fermée.

3.1 Retour d'état par ZOH

Question 13

Nous avons testé plusieurs périodes d'échantillonnage entre 0,1 s et 5 s. Les valeurs propres discrètes restent à l'intérieur du cercle unité, comme le montre la Figure 6.

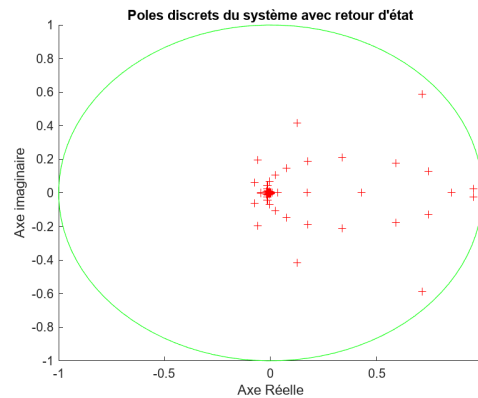
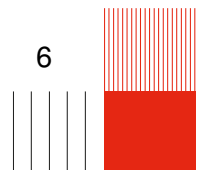


FIGURE 6 – Valeurs propres pour différentes périodes d'échantillonnage.

Question 14

D'après la Figure 7, les petites périodes d'échantillonnage permettent de mieux approcher la réponse temporelle continue, comme le montre la Figure 5. On choisit donc $T_s = 0,01$ s, car cette valeur conserve un comportement proche de la réponse continue.



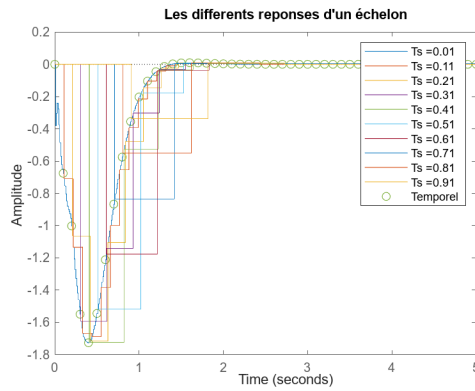


FIGURE 7 – Réponses temporelles du système pour différentes périodes d'échantillonnage.

4 REJET DE PERTURBATION

Question 15

:0

Question 16

La Figure 8 montre que le système ne corrige pas l'erreur due à la perturbation.

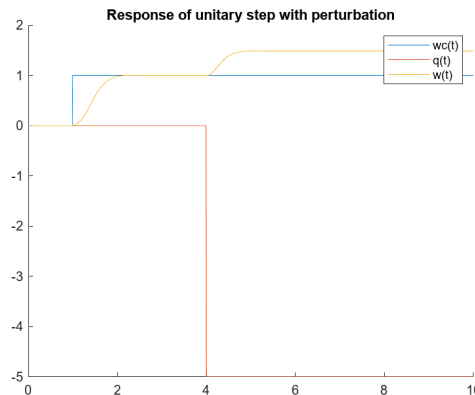


FIGURE 8 – Simulation du système avec une perturbation.

Pour résoudre ce problème, il faudra ajouter une action intégrale.

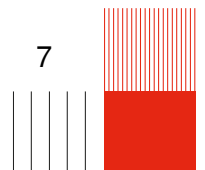
4.1 Remplacement du pré-gain H

Question 17

À partir des huit pôles obtenus avec la commande par retour d'état de la Question 11, on ajoute un pôle supplémentaire associé à l'action intégrale.

$$p_i = -4,3805 \quad (18)$$

Ainsi, les pôles désirés du système augmenté sont :



$$p_{\text{dés}} = \begin{bmatrix} -84,6647 \\ -7,5585 + 68,7669i \\ -7,5585 - 68,7669i \\ -27,9691 + 17,2408i \\ -27,9691 - 17,2408i \\ -15,9108 \\ -4,3805 + 2,6626i \\ -4,3805 - 2,6626i \\ -4,3805 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Question 18

En utilisant la fonction `place` sous MATLAB, nous avons calculé les gains K_1 et K_i :

$$K_1 = [-3,1081 \quad -18,9367 \quad -0,1707 \quad 2,1192 \quad 19,4677 \quad -2,3049 \quad 2,3377 \quad -1,7524] \quad (20)$$

$$K_i = [26,2831]. \quad (21)$$

Question 19

La Figure 9 montre qu'avec l'action intégrale, la perturbation est rejetée et l'erreur en régime permanent est annulée.

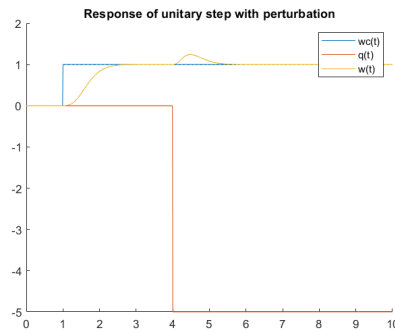
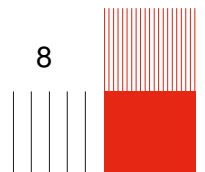


FIGURE 9 – Simulation du système avec correction par action intégrale.





INSA TOULOUSE

135 avenue de Rangueil
31400 Toulouse

Tel : +33 (0)5 61 55 95 13

www.insa-toulouse.fr

