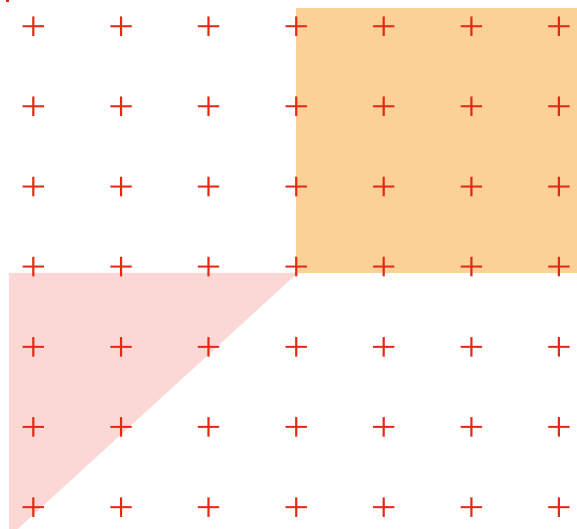


## BE COMMANDE NUMERIQUE

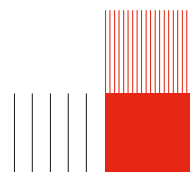
**Brage JOHNSEN**  
**Gabriela DONZELLI**  
**Thibaut ALETRUT**  
Département GEI  
4A-AE

**Bureau d'étude : DIGITAL CONTROL  
OF A CANTILEVER BEAM**



# SOMMAIRE

<b>1</b>	<b>Modélisation du système</b>	<b>1</b>
1.1	Dynamique avec EDP . . . . .	1
1.2	Discretisation par éléments finis . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Retour de sortie</b>	<b>4</b>
2.1	Retour de sortie par ZOH . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Retour d'état</b>	<b>7</b>
3.1	Retour d'état par ZOH . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Rejet de perturbation</b>	<b>8</b>
4.1	Remplacement du pré-gain H . . . . .	9



# 1 MODÉLISATION DU SYSTÈME

## 1.1 Dynamique avec EDP

### Question 1

A partir des equations differentielles partielles nous avons retrouvé l'espace d'état sous cette forme :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(\zeta, t) \\ e_2(\zeta, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -q(\zeta, t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

## 1.2 Discrétisation par éléments finis

### Question 2

À partir des informations données dans l'exercice, on peut écrire :

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial^2 e_2}{\partial \zeta^2} = \phi(\zeta)^T \dot{x}_{1d}(t) \quad (2)$$

En multipliant les deux membres par le vecteur d'approximation  $\phi(\zeta)$ , on obtient :

$$\phi(\zeta) \frac{\partial^2 e_2}{\partial \zeta^2} = \phi(\zeta) \phi(\zeta)^T \dot{x}_{1d}(t) \quad (3)$$

En remplaçant ensuite  $e_2$  par son approximation, on obtient :

$$\phi(\zeta) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} (\phi(\zeta)^T e_{2d}(t)) = \phi(\zeta) \phi(\zeta)^T \dot{x}_{1d}(t) \quad (4)$$

Comme  $e_{2d}(t)$  ne dépend pas de  $\zeta$ , il peut être sorti de l'intégrale. En intégrant sur  $[0, L]$ , on obtient :

$$\int_0^L \phi(\zeta) \phi(\zeta)^T d\zeta \dot{x}_{1d}(t) = \int_0^L \phi(\zeta) \frac{\partial^2 \phi(\zeta)^T}{\partial \zeta^2} d\zeta e_{2d}(t) \quad (5)$$

Après avoir fait une integration par partie : à inserer :

On identifie alors les matrices  $E$  et  $D$ . Ainsi, les deux équations d'état discrétisées s'écrivent :

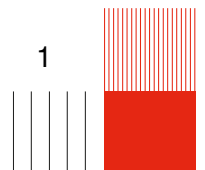
$$\begin{aligned} E \dot{x}_{1d}(t) &= D e_{2d}(t), \\ E \dot{x}_{2d}(t) &= -D^T e_{1d}(t) - \phi(L) u(t) - F_{ext}. \end{aligned} \quad (6)$$

Enfin, on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} E \dot{x}_{1d}(t) &= D e_{2d}(t), \\ E \dot{x}_{2d}(t) &= -D^T e_{1d}(t) - \phi(L) u(t) - F_{ext}, \\ y(t) &= -\phi(L)^T e_{2d}(t). \end{aligned}} \quad (7)$$

### Question 3

Le système devient avec  $\rho = EI = 1$  et  $q(\zeta, t) = 0$  :



$$\begin{aligned}
E\dot{x}_{1d}(t) &= Dx_{2d}(t), \\
E\dot{x}_{2d}(t) &= -D^T x_{1d}(t) - \phi(L)u(t), \\
y(t) &= -\phi(L)^T x_{2d}(t).
\end{aligned} \tag{8}$$

En multipliant les deux premières équations par  $E^{-1}$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{1d}(t) &= E^{-1}Dx_{2d}(t), \\
\dot{x}_{2d}(t) &= -E^{-1}D^T x_{1d}(t) - E^{-1}\phi(L)u(t).
\end{aligned} \tag{9}$$

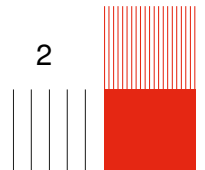
Et, on obtient comme valeurs de  $A$ ,  $B$  et  $C$  :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & E^{-1}D \\ -E^{-1}D^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 114 & 6 & 12 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -54 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1188 & -12 & -114 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -828 & -12 & -54 & 6 \\ 6 & 54 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -114 & -2 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -828 & -6 & 54 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -1188 & -6 & 114 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -E^{-1}\Phi(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ -16 \\ -60 \\ -120 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad -\Phi^T(L, t)] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0] \tag{11}$$

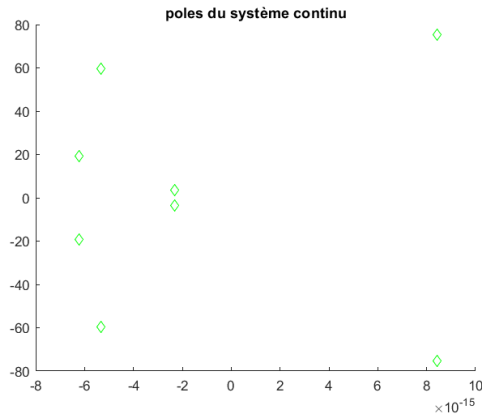
Finalement,

$$\boxed{
\begin{aligned}
\dot{x}_d(t) &= Ax_d(t) + Bu(t), \\
y(t) &= Cx_d(t).
\end{aligned}
} \tag{12}$$

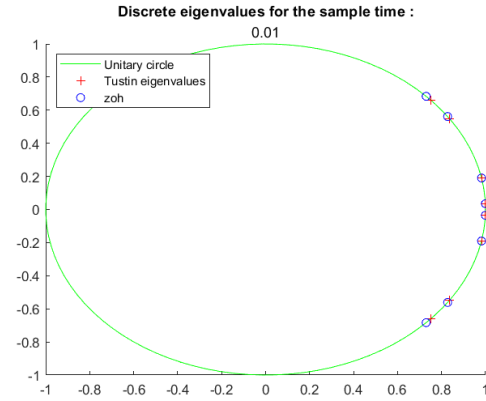


#### Question 4

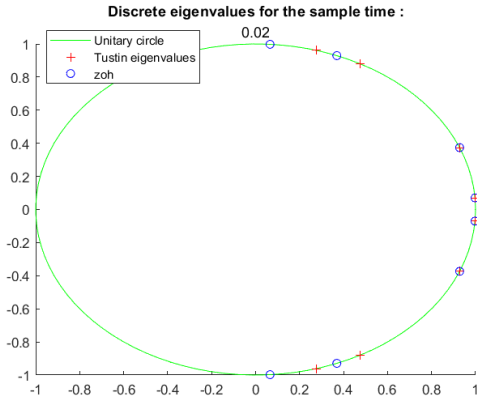
La Figure 1a correspond aux valeurs propres en temps continu, tandis que les figures 1b, 1c et 1d montrent les valeurs propres discrètes obtenues avec les méthodes de Tustin et ZOH pour différents temps d'échantillonnage.



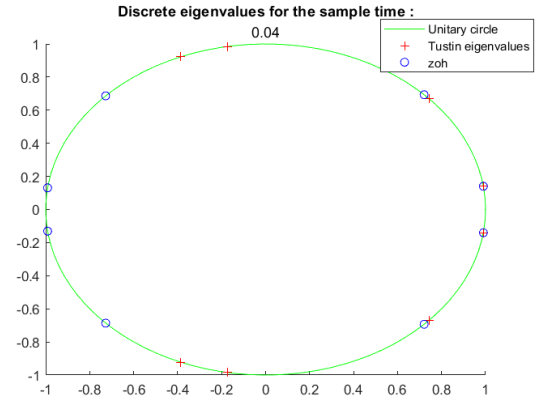
(a) Valeurs propres en temps continu.



(b)  $T_s = 0,01$  s.



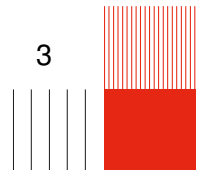
(c)  $T_s = 0,02$  s.



(d)  $T_s = 0,04$  s.

FIGURE 1 – Comparaison des valeurs propres du système en temps continu et en temps discret.

En temps continu, le système présente deux pôles à partie réelle positive, ce qui montre son instabilité. Après discrétisation, les pôles obtenus avec les méthodes de Tustin et ZOH se trouvent sur ou proches du cercle unité. Comme tous nos pôles sont à  $|z| = 1$ , nous ne pouvons pas conclure sur la stabilité ni l'instabilité.



### Question 5

La Figure 2 montre que la sortie  $y(t)$  oscille après l'échelon, confirmant l'instabilité du système en boucle ouverte.

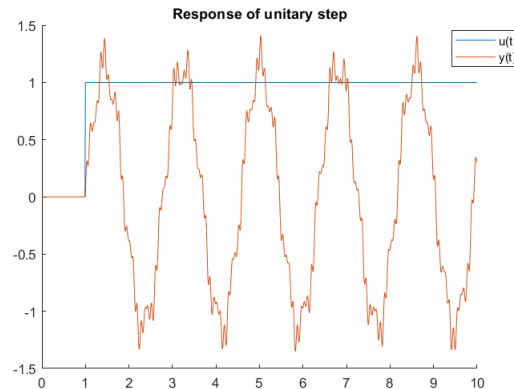


FIGURE 2 – Response du système en boucle ouverte.

### Question 6

:0

## 2 RETOUR DE SORTIE

### Question 7

Nous avons implémenté la loi de commande :  $u(t) = -Ky(t) + Hy_c(t)$  Nous avons utilisé une boucle `for` sous MATLAB afin de tester les valeurs de  $k$  entre 0 et 100.

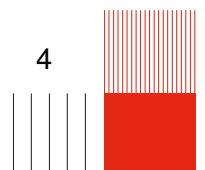
Le gain  $H$  est ensuite calculé à partir d'un système en boucle fermée sous la forme :

$$H = -\frac{1}{C(A-BKC)^{-1}B}$$

Ainsi, les valeurs retenues pour la commande en boucle fermée sont :  $K = 1,85$  &  $H = -3$

### Question 8

La Figure 3 montre que  $w(L, t)$  suit la consigne  $w_c(t)$  unitaire, avec une erreur nulle en régime permanent, et un temps caractéristique à  $\tau = 1s$ .



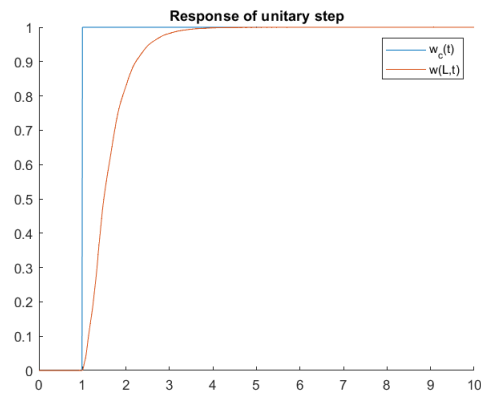
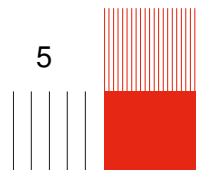


FIGURE 3 – Suivi de la consigne  $w_c(t)$  par la position  $w(L, t)$ .

## 2.1 Retour de sortie par ZOH



### Question 9

La Figure 4 compare les valeurs propres du système en boucle fermée en temps continu avec celles obtenues après discrétisation par ZOH, pour les trois périodes d'échantillonnage proposées.

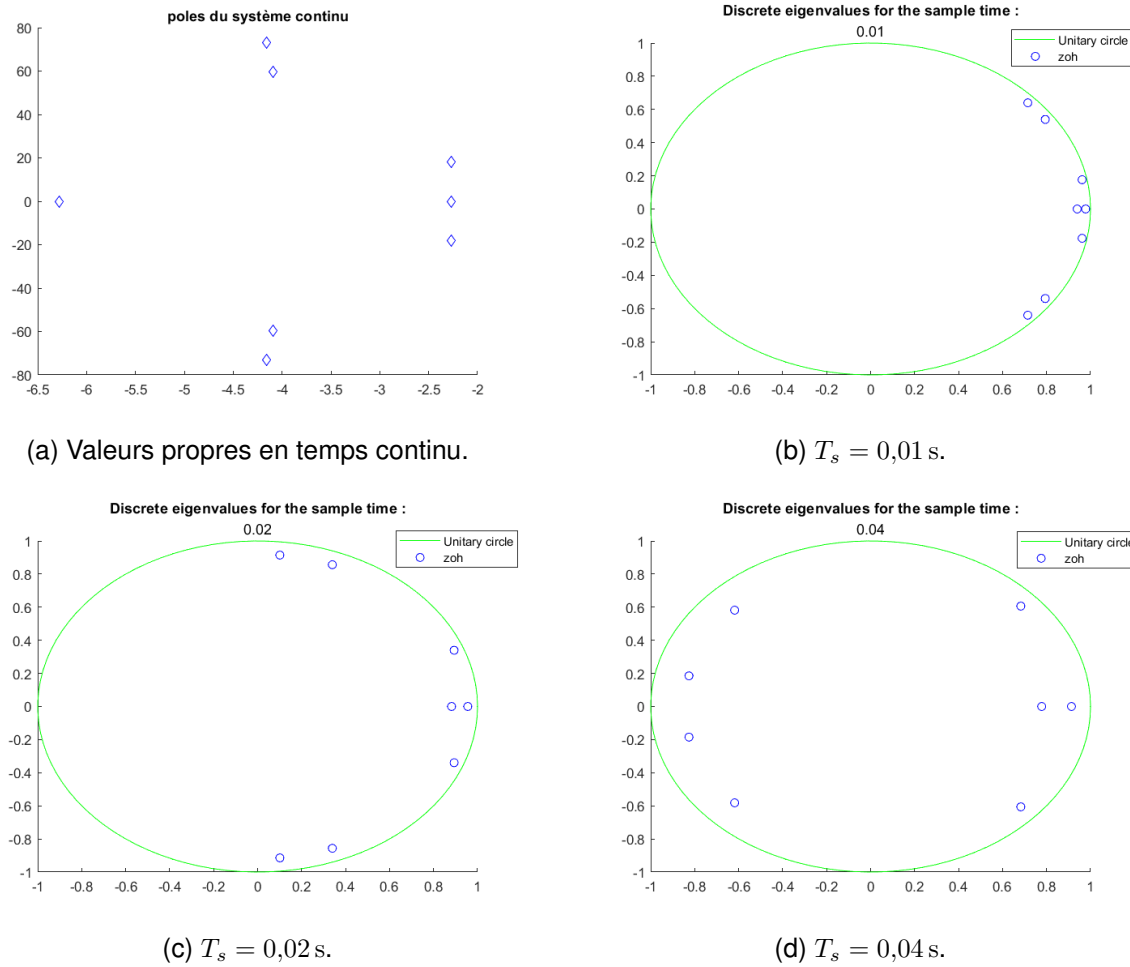
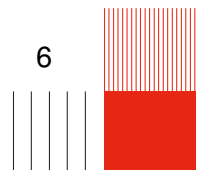


FIGURE 4 – Comparaison des valeurs propres du système en boucle fermée.

Les pôles discrets restent à l'intérieur du cercle unité pour les trois valeurs de  $T_s$ , ce qui montre que le système discret reste stable.



### Question 10

Nous n'avons pas de temps d'échantillonnage qui rend le système instable.



FIGURE 5 – Système à  $T_s = 2s$

## 3 RETOUR D'ÉTAT

### Question 11

Avec la fonction `lqr` de MATLAB, le gain de retour d'état obtenu est :

$$K = [0,97 \quad -14,62 \quad 0,66 \quad 1,32 \quad 19,32 \quad 0,39 \quad 2,40 \quad -2,11] \quad (13)$$

### Question 12

La Figure 6 montre que le système en boucle fermée suit correctement la référence avec un léger dépassement et converge vers la consigne en régime permanent.

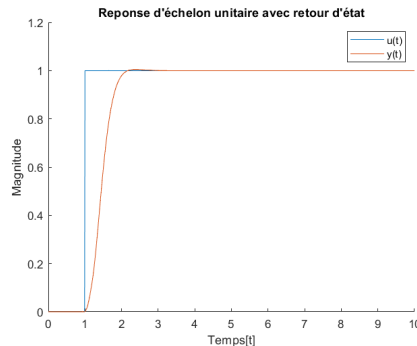
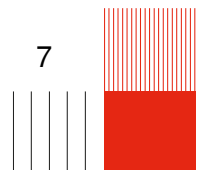


FIGURE 6 – Simulation numérique du système continu en boucle fermée.

### 3.1 Retour d'état par ZOH

#### Question 13

Nous avons testé plusieurs périodes d'échantillonnage entre 0,1s et 5s. Les valeurs propres discrètes restent à l'intérieur du cercle unité, comme le montre la Figure 7.



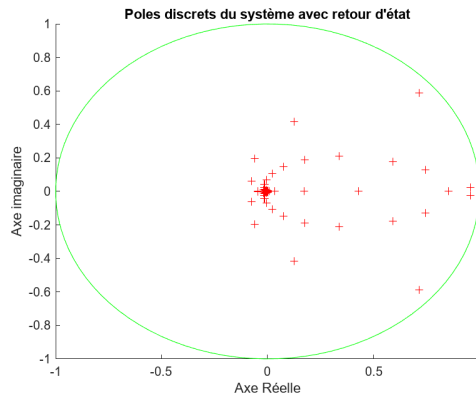


FIGURE 7 – Valeurs propres pour différentes périodes d'échantillonnage.

#### Question 14

Comme nous avons fait en Q12. Par approche empirique, nous avons trouvé que  $T_s = 0.3s$ , ce qui convient pour maintenir le comportement temporel voulu. Voir Figure 8.

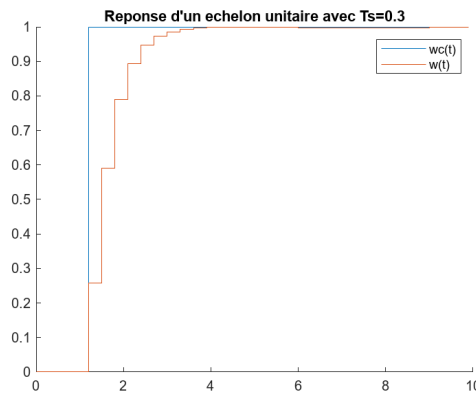


FIGURE 8 – Réponse du système à  $T_s = 0.3s$

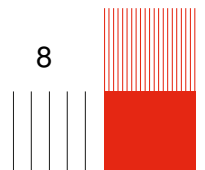
## 4 REJET DE PERTURBATION

**Question 15** Après avoir calculé, nous retrouvons la matrice  $B_p$  sous la forme :

$$B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -E^{-1} \int_0^L \Phi(\zeta) d\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

#### Question 16

La Figure 9 montre que le système ne corrige pas l'erreur due à la perturbation.



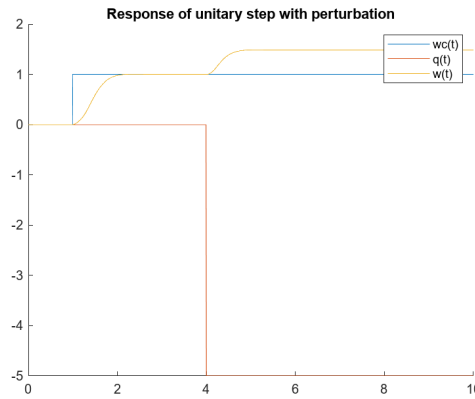


FIGURE 9 – Simulation du système avec une perturbation.

Pour résoudre ce problème, il faudra ajouter une action intégrale.

## 4.1 Remplacement du pré-gain H

### Question 17

À partir des huit pôles obtenus avec la commande par retour d'état de la Question 11, on ajoute un pôle supplémentaire associé à l'action intégrale  $p_i = -4,3805$ , correspondant au pôle du système le plus rapide. Ainsi, les pôles désirés du système augmenté sont :

$$p_{\text{des}} = \begin{bmatrix} -84,6647 \\ -7,5585 + 68,7669i \\ -7,5585 - 68,7669i \\ -27,9691 + 17,2408i \\ -27,9691 - 17,2408i \\ -15,9108 \\ -4,3805 + 2,6626i \\ -4,3805 - 2,6626i \\ -4,3805 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

### Question 18

En utilisant la fonction `place` sous MATLAB, nous avons calculé les gains  $K_1$  et  $K_i$  à partir du système augmenté :

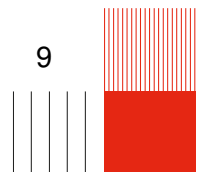
$$K_{\text{Aug}} = [K_1 \quad K_i] \quad (16)$$

$$K_1 = [-3,1081 \quad -18,9367 \quad -0,1707 \quad 2,1192 \quad 19,4677 \quad -2,3049 \quad 2,3377 \quad -1,7524] \quad (17)$$

$$K_i = [26,2831] \quad (18)$$

### Question 19

La Figure 10 montre qu'avec l'action intégrale, la perturbation est rejetée et l'erreur en régime permanent est annulée.



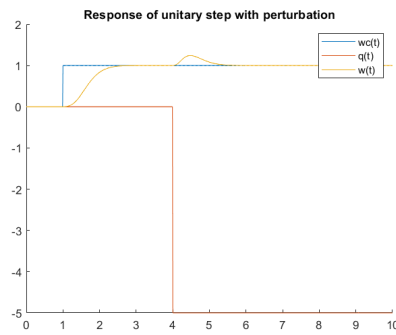
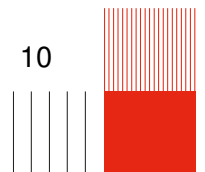


FIGURE 10 – Simulation du système avec correction par action intégrale.





## **INSA TOULOUSE**

135 avenue de Rangueil  
31400 Toulouse

Tel : +33 (0)5 61 55 95 13

**[www.insa-toulouse.fr](http://www.insa-toulouse.fr)**

