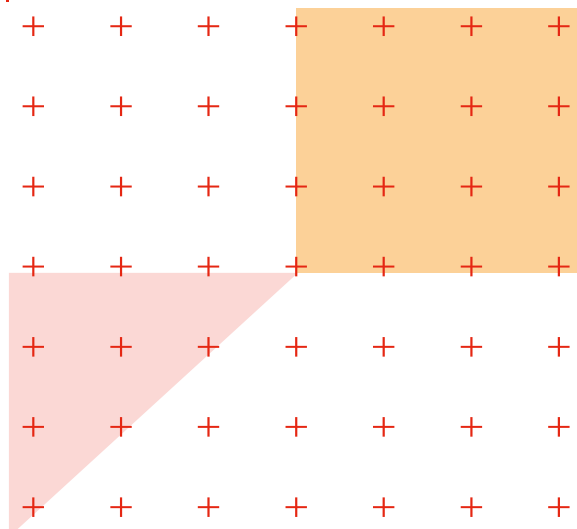


BE COMMANDE NUMERIQUE

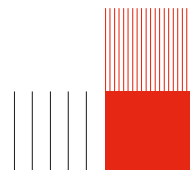
Brage JOHNSEN
Gabriela DONZELLI
Thibaut ALETRUT
Département GEI
4A-AE

**Bureau d'étude : DIGITAL CONTROL
OF A CANTILEVER BEAM**



SOMMAIRE

1	Modélisation du système	1
1.1	Dynamique avec EDP	1
1.2	Discretisation par éléments finis	1
2	Retour de sortie	4
2.1	Retour de sortie par ZOH	4
3	Retour d'état	5
3.1	Retour d'état par ZOH	6
4	Rejet de perturbation	7
4.1	Remplacement du pré-gain H	7



1 MODÉLISATION DU SYSTÈME

1.1 Dynamique avec EDP

Question 1

A partir des equations differentielles partielles nous avons retrouvé l'espace d'état sous cette forme :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(\zeta, t) \\ e_2(\zeta, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -q(\zeta, t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

1.2 Discrétisation par éléments finis

Question 2

À partir des informations données dans l'exercice, on peut écrire :

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial^2 e_2}{\partial \zeta^2} = \phi(\zeta)^T \dot{x}_{1d}(t) \quad (2)$$

En multipliant les deux membres par le vecteur d'approximation $\phi(\zeta)$, on obtient :

$$\phi(\zeta) \frac{\partial^2 e_2}{\partial \zeta^2} = \phi(\zeta) \phi(\zeta)^T \dot{x}_{1d}(t) \quad (3)$$

En remplaçant ensuite e_2 par son approximation, on obtient :

$$\phi(\zeta) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} (\phi(\zeta)^T e_{2d}(t)) = \phi(\zeta) \phi(\zeta)^T \dot{x}_{1d}(t) \quad (4)$$

Comme $e_{2d}(t)$ ne dépend pas de ζ , il peut être sorti de l'intégrale. En intégrant sur $[0, L]$, on obtient :

$$\int_0^L \phi(\zeta) \phi(\zeta)^T d\zeta \dot{x}_{1d}(t) = \int_0^L \phi(\zeta) \frac{\partial^2 \phi(\zeta)^T}{\partial \zeta^2} d\zeta e_{2d}(t) \quad (5)$$

Après avoir fait une integration par partie : à inserer :

On identifie alors les matrices E et D . Ainsi, les deux équations d'état discrétisées s'écrivent :

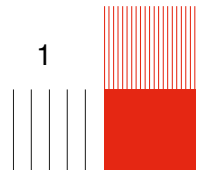
$$\begin{aligned} E \dot{x}_{1d}(t) &= D e_{2d}(t), \\ E \dot{x}_{2d}(t) &= -D^T e_{1d}(t) - \phi(L) u(t) - F_{ext}. \end{aligned} \quad (6)$$

Enfin, on obtient :

$$\begin{aligned} E \dot{x}_{1d}(t) &= D e_{2d}(t), \\ E \dot{x}_{2d}(t) &= -D^T e_{1d}(t) - \phi(L) u(t) - F_{ext}, \\ y(t) &= -\phi(L)^T e_{2d}(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Question 3

Le système devient avec $\rho = EI = 1$ et $q(\zeta, t) = 0$:



$$\begin{aligned}
E\dot{x}_{1d}(t) &= Dx_{2d}(t), \\
E\dot{x}_{2d}(t) &= -D^T x_{1d}(t) - \phi(L)u(t), \\
y(t) &= -\phi(L)^T x_{2d}(t).
\end{aligned} \tag{8}$$

En multipliant les deux premières équations par E^{-1} , on obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{1d}(t) &= E^{-1}Dx_{2d}(t), \\
\dot{x}_{2d}(t) &= -E^{-1}D^T x_{1d}(t) - E^{-1}\phi(L)u(t).
\end{aligned} \tag{9}$$

Et, on obtient comme valeurs de A , B et C :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & E^{-1}D \\ -E^{-1}D^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 114 & 6 & 12 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -54 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1188 & -12 & -114 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -828 & -12 & -54 & 6 \\ 6 & 54 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -114 & -2 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -828 & -6 & 54 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -1188 & -6 & 114 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -E^{-1}\Phi(L) \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4 \ -16 \ -60 \ -120]^T \tag{11}$$

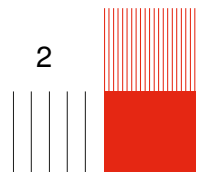
$$C = [0 \ -\Phi^T(L, t)] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0] \tag{12}$$

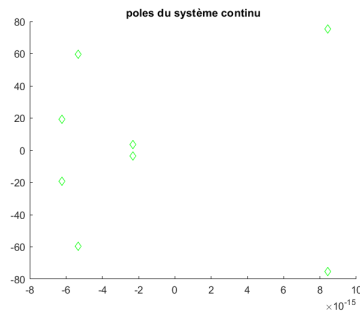
Finalement,

$$\boxed{
\begin{aligned}
\dot{x}_d(t) &= Ax_d(t) + Bu(t), \\
y(t) &= Cx_d(t).
\end{aligned}
} \tag{13}$$

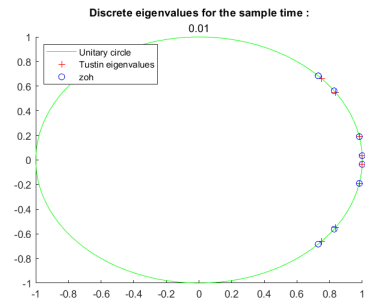
Question 4

Voici le lieu des racines du système en continu et en temps discret. $T_s = 0.01; 0.02; 0.04$ avec le cercle unitaire. Comme tous nos pôles sont à $|z| = 1$, nous ne pouvons pas conclure sur la stabilité ni l'instabilité. En temps continu nous avons instabilité, à cause des pôles : $Re\{\lambda\} > 0$

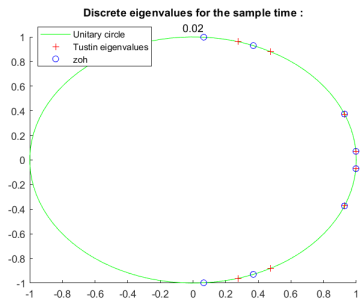




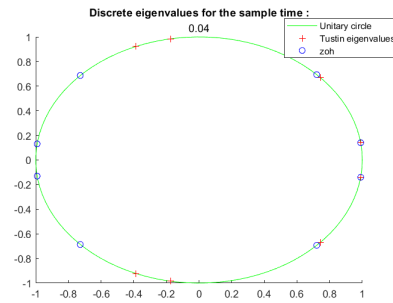
(a) Valeurs propres en temps continu.



(b) $T_s = 0.01$ s.

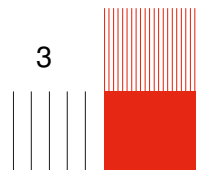


(c) $T_s = 0.02$ s.



(d) $T_s = 0.04$ s.

FIGURE 1 – Comparaison des valeurs propres du système en temps continu et en temps discret.



Question 5

La Figure 2 montre que la sortie $y(t)$ oscille après l'échelon, confirmant l'instabilité du système en boucle ouverte.

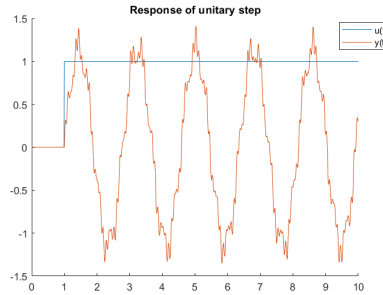


FIGURE 2 – Response du système en boucle ouverte.

Question 6

:0

2 RETOUR DE SORTIE

Question 7

Nous avons implementé la loi de commande : $u(t) = -Ky(t) + Hy_c(t)$ Nous avons utilisé une boucle `for` sous MATLAB afin de tester les valeurs de k entre 0 et 100.

Le gain H est ensuite calculé à partir d'un système en boucle fermée sous la forme :

$$H = -\frac{1}{C(A-BKC)^{-1}B}$$

Ainsi, les valeurs retenues pour la commande en boucle fermée sont : **K = 1.85 & H = -3**

Question 8

La Figure 3 montre que $w(L, t)$ suit la consigne $w_c(t)$ unitaire, avec une erreur nulle en régime permanent, et un temps caractéristique à $\tau = 1s$.

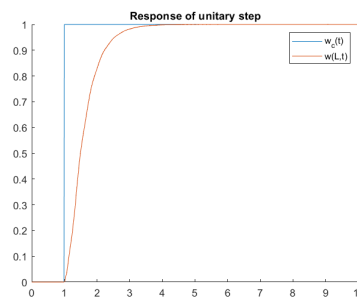
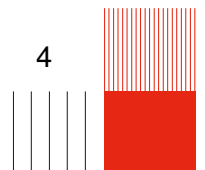


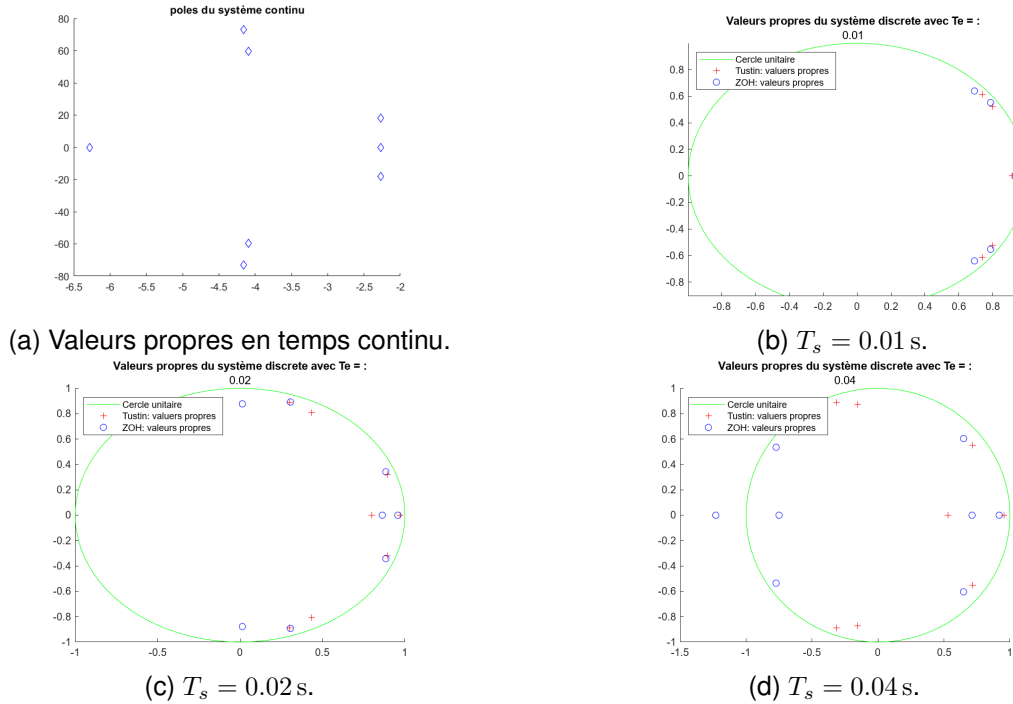
FIGURE 3 – Suivi de la consigne $w_c(t)$ par la position $w(L, t)$.

2.1 Retour de sortie par ZOH

Question 9



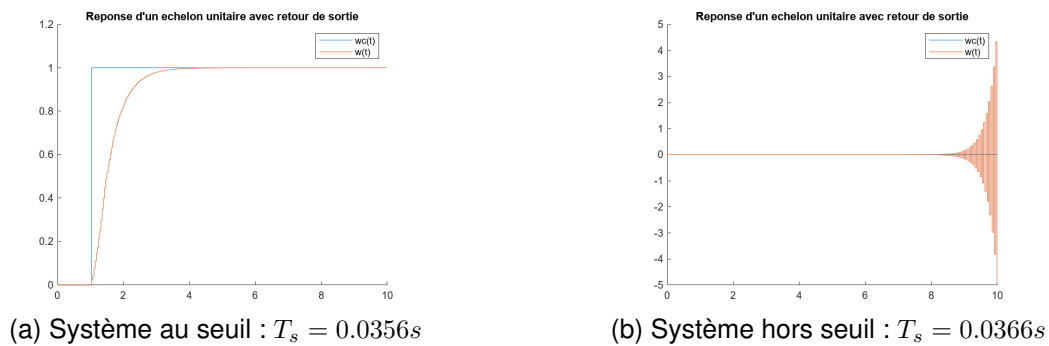
La Figure ?? compare les valeurs propres du système en boucle fermée en temps continu avec celles obtenues après discrétisation par ZOH, pour les trois périodes d'échantillonnage proposées : $T_e = \{0.01s; 0.02s; 0.04s\}$.



Comme nous pouvons voir, les pôles du système discret restent à l'intérieur du cercle unitaire, mais dès que nous passons à $T_e = 0.04s$ ça rend le système instable avec un pôle hors le cercle.

Question 10

Nous avons trouvé un seuil de $T_s = 0.0356s$ à l'aide d'un boucle qui traverse les différents périodes d'échantillonnage.

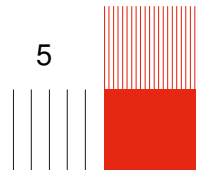


3 RETOUR D'ÉTAT

Question 11

Avec la fonction `lqr` de MATLAB, le gain de retour d'état obtenu est :

BE Commande Numerique



$$K = \begin{bmatrix} 0.97 & -14.62 & 0.66 & 1.32 & 19.32 & 0.39 & 2.40 & -2.11 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Question 12

La Figure 6 montre que le système en boucle fermée suit correctement la référence avec un léger dépassement et converge vers la consigne en régime permanent.

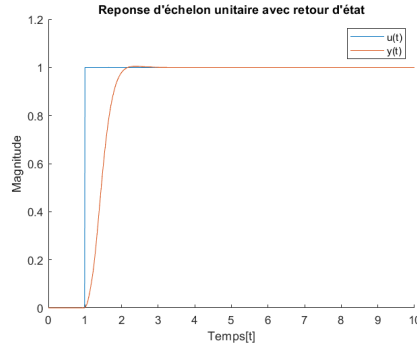


FIGURE 6 – Simulation numérique du système continu en boucle fermée.

3.1 Retour d'état par ZOH

Question 13

Avec le même période d'échantillonnage comme dans la section précédente : $T_e = 0.0356$ notre système est rendu instable.

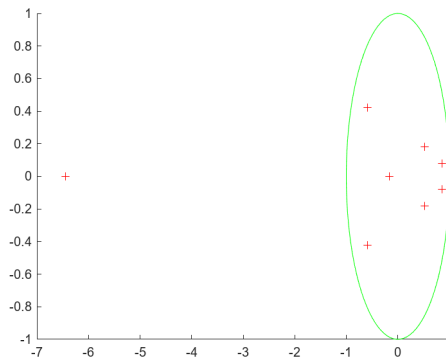
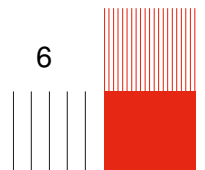
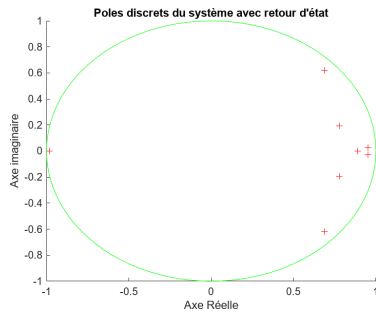


FIGURE 7 – Pôles du système avec temps d'échantillonnage : $T_e = 0.0356$

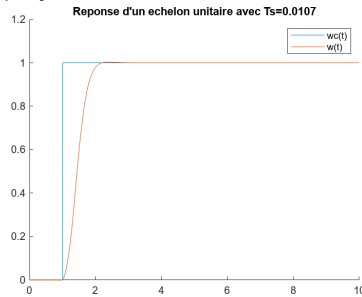
Question 14

Nous retrouvons un seuil d'échantillonnage à : $T_e = 0.0107s$. Voici les comportements du système dedans et hors seuil.

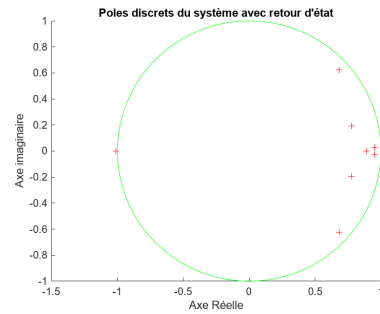




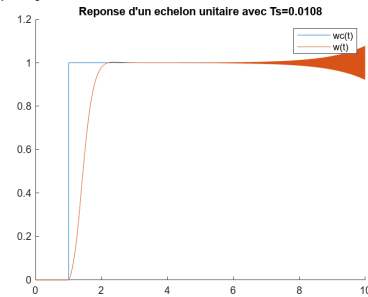
(a) Système au seuil : $T_s = 0.0107s$



(c) Reponse à un echelon unitaire : $T_s = 0.0107s$



(b) Système hors seuil : $T_s = 0.0108s$



(d) Reponse à un echelon unitaire : $T_s = 0.0108s$

4 REJET DE PERTURBATION

Question 15 Après avoir calculé, nous retrouvons la matrice B_p sous la forme :

$$B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -E^{-1} \int_0^L \Phi(\zeta) d\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (15)$$

Question 16

La Figure 9 montre que le système ne corrige pas l'erreur due à la perturbation.

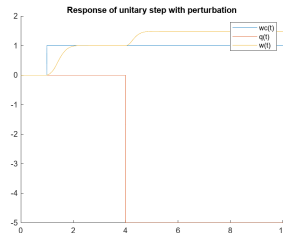


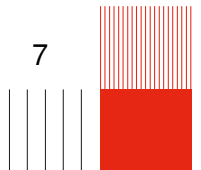
FIGURE 9 – Simulation du système avec une perturbation.

Pour résoudre ce problème, il faudra ajouter une action intégrale.

4.1 Remplacement du pré-gain H

Question 17

À partir des huit pôles obtenus avec la commande par retour d'état de la Question 11, on ajoute un pôle supplémentaire associé à l'action intégrale $p_i = -4,3805$, correspondant au pôle du système le plus rapide. Ainsi, les pôles désirés du système augmenté sont :



$$p_{des} =$$

$$\begin{bmatrix} -85 & -8 + 69i & -8 - 69i & -28 + 17i & -28 - 17i & -16 & -4 + 3i & -4 - 3i & -4 \end{bmatrix}^T \quad (16)$$

Question 18

En utilisant la fonction `place` sous MATLAB, nous avons calculé les gains K_1 et K_i à partir du système augmenté :

$$K_{Aug} = [K_1 \quad K_i] \quad (17)$$

$$K_1 = [-3.1081 \quad -18.9367 \quad -0.1707 \quad 2.1192 \quad 19.4677 \quad -2.3049 \quad 2.3377 \quad -1.7524] \quad (18)$$

$$K_i = [26.2831] \quad (19)$$

Question 19

La Figure 10 montre qu'avec l'action intégrale, la perturbation est rejetée et l'erreur en régime permanent est corrigée.

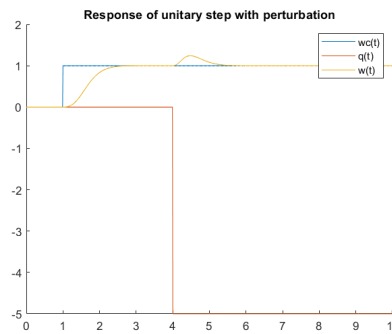
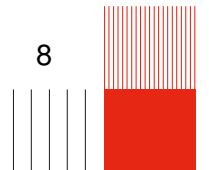


FIGURE 10 – Simulation du système avec correction par action intégrale.

Question 20

Nous avons testé avec 6 decimals, mais la valeur absolue d'un des pôles $z : |z| > 1$, alors nous n'arrivons jamais à stabiliser le système. Aussi, nous considérons avec $T_s \rightarrow 0.00001$ est un temps continu, la commande n'est pas implemantable sur un controleur numérique.





INSA TOULOUSE

135 avenue de Rangueil
31400 Toulouse

Tel : +33 (0)5 61 55 95 13

www.insa-toulouse.fr

