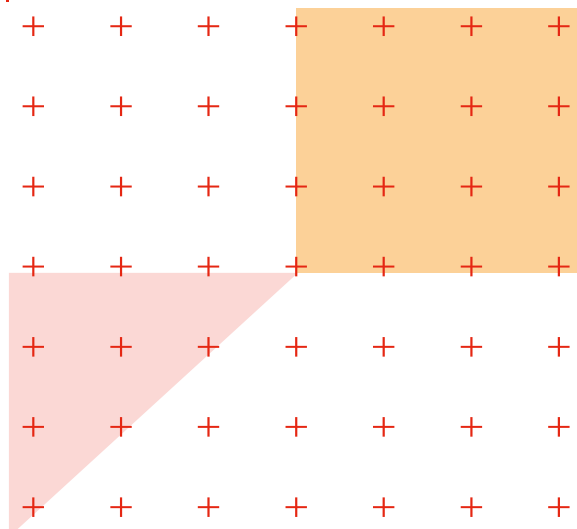


BE COMMANDE NUMERIQUE

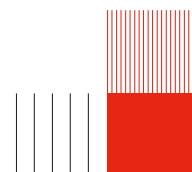
Brage JOHNSEN
Gabriela DONZELLI
Thibaut ALETRUT
Département GEI
4A-AE

**Bureau d'étude : DIGITAL CONTROL
OF A CANTILEVER BEAM**



SOMMAIRE

1	Modélisation du système	1
1.1	Dynamique avec EDP	1
1.2	Discretisation par éléments finis	1
2	Retour de sortie	4
2.1	Retour de sortie par ZOH	4
3	Retour d'état	5
3.1	Retour d'état par ZOH	6
4	Rejet de perturbation	7
4.1	Remplacement du pré-gain H	8



1 MODÉLISATION DU SYSTÈME

1.1 Dynamique avec EDP

Question 1

A partir des equations differentielles partielles nous avons retrouvé l'espace d'état sous cette forme :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(\zeta, t) \\ e_2(\zeta, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -q(\zeta, t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

1.2 Discrétisation par éléments finis

Question 2

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} e_2(\zeta, t) \quad (2)$$

Par la méthode de discrétisation :

$$\phi^T(\zeta) \dot{x}_{1d}(t) = \frac{\partial^2 \phi^T(\zeta)}{\partial \zeta^2} e_{2d}(t) \Leftrightarrow \int_0^L \phi(\zeta) \phi^T(\zeta) d\zeta \dot{x}_{1d}(t) = \underbrace{\int_0^L \phi(\zeta) \frac{\partial^2 \phi^T(\zeta)}{\partial \zeta^2} d\zeta}_{J} e_{2d}(t) \quad (3)$$

Par intégration par parties deux fois :

$$J = \left[\phi(\zeta) \frac{\partial \phi^T(\zeta)}{\partial \zeta} \right]_0^L - \int_0^L \frac{\partial \phi(\zeta)}{\partial \zeta} \frac{\partial \phi^T(\zeta)}{\partial \zeta} d\zeta \quad (4)$$

$$\begin{aligned} J &= \phi(L) \frac{\partial \phi^T}{\partial \zeta}(L) e_{2d}(t) - 0 - \left[\frac{\partial \phi}{\partial \zeta}(\zeta) \phi^T(\zeta) e_{2d}(t) \right]_0^L + \int_0^L \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2}(\zeta) \phi^T(\zeta) d\zeta e_{2d}(t) \\ &= \phi(L) \frac{\partial \phi^T}{\partial \zeta}(L) e_{2d}(t) - \frac{\partial \phi}{\partial \zeta}(L) \phi^T(L) e_{2d}(t) + \frac{\partial \phi}{\partial \zeta}(0) e_{2d}(0, t) + \int_0^L \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2}(\zeta) \phi^T(\zeta) e_{2d}(t) d\zeta \end{aligned} \quad (5)$$

On a $e_2(0, t) = 0 \Leftrightarrow E \dot{x}_1 = D e_{2d}(t)$

Comme $D = \phi(L) \frac{d\phi^T}{d\zeta}(L) - \frac{d\phi}{d\zeta}(L) \phi^T(L) + \int_0^L \frac{d^2 \phi}{d\zeta^2}(\zeta) \phi^T(\zeta) d\zeta$. Et $(AB)^T = B^T A^T$, on a :

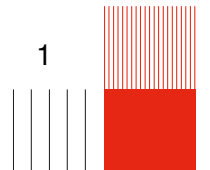
$$-D^T = -\frac{d\phi}{d\zeta}(L) \phi^T(L) + \phi(L) \frac{d\phi^T}{d\zeta}(L) - \int_0^L \phi(\zeta) \frac{d^2 \phi^T}{d\zeta^2}(\zeta) d\zeta. \quad (6)$$

$$E \dot{x}_{2d}(t) = - \int_0^L \phi(\zeta) \frac{d^2 \phi^T}{d\zeta^2}(\zeta) d\zeta e_{1d}(t) - F_{ext}. \quad (7)$$

Donc,

$$E \dot{x}_{2d}(t) = -D^T e_{1d}(t) + \frac{d\phi}{d\zeta}(L) e_1(L, t) - \phi(L) \frac{\partial e_1}{\partial \zeta}(L, t) - F_{ext}. \quad (8)$$

Comme $e_1(L, t) = 0$, $\frac{\partial e_1}{\partial \zeta}(L, t) = u(t)$ on obtient bien :



$$E\dot{x}_{2d}(t) = -D^T e_{1d}(t) - \phi(L)u(t) - F_{ext}. \quad (9)$$

Question 3

Le système devient avec $\rho = EI = 1$ et $q(\zeta, t) = 0$:

$$\begin{aligned} E\dot{x}_{1d}(t) &= Dx_{2d}(t), \\ E\dot{x}_{2d}(t) &= -D^T x_{1d}(t) - \phi(L)u(t), \\ y(t) &= -\phi(L)^T x_{2d}(t). \end{aligned} \quad (10)$$

En multipliant les deux premières équations par E^{-1} , on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1d}(t) &= E^{-1}Dx_{2d}(t), \\ \dot{x}_{2d}(t) &= -E^{-1}D^T x_{1d}(t) - E^{-1}\phi(L)u(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Et, on obtient comme valeurs de A , B et C :

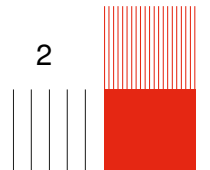
$$A = \begin{bmatrix} 0 & E^{-1}D \\ -E^{-1}D^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 114 & 6 & 12 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -54 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1188 & -12 & -114 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -828 & -12 & -54 & 6 \\ 6 & 54 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -114 & -2 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -828 & -6 & 54 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -1188 & -6 & 114 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -E^{-1}\Phi(L) \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4 \ -16 \ -60 \ -120]^T \quad (13)$$

$$C = [0 \ -\Phi^T(L, t)] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0] \quad (14)$$

Finalement,

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_d(t) &= Ax_d(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx_d(t). \end{aligned}} \quad (15)$$



Question 4

Voici le lieu des racines du système en continu et en temps discret. $T_s = 0.01; 0.02; 0.04$ avec le cercle unitaire. Comme tous nos pôles sont à $|z| = 1$, nous ne pouvons pas conclure sur la stabilité ni l'instabilité. En temps continu le système est instable, à cause des pôles : $Re\{\lambda\} > 0$

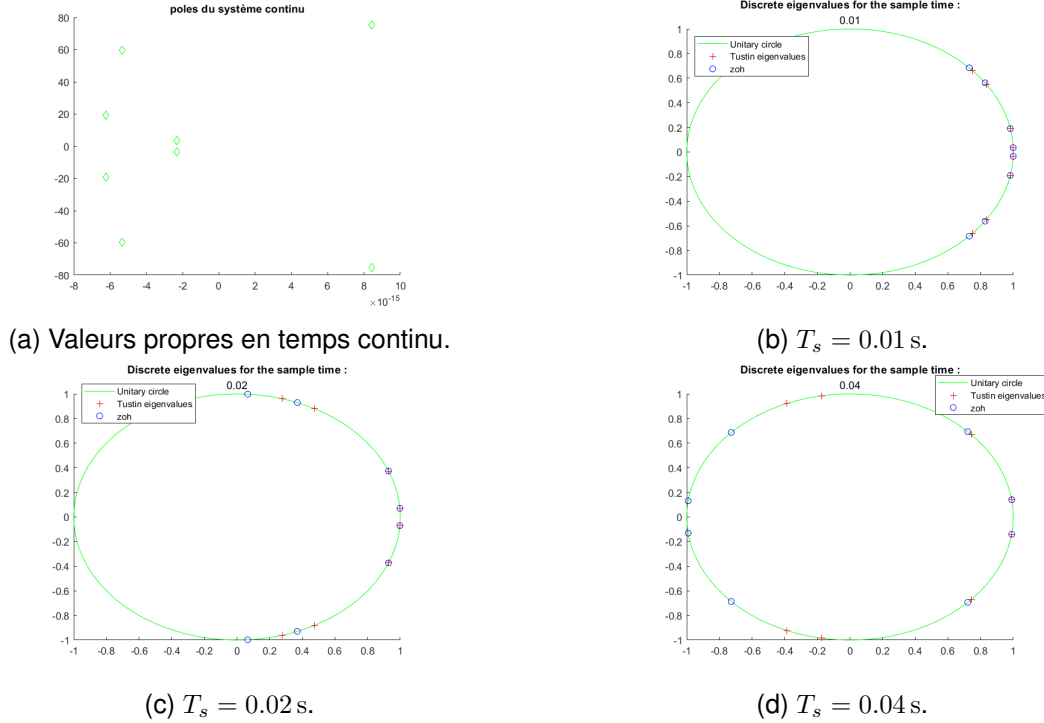


FIGURE 1 – Comparaison des valeurs propres du système en temps continu et en temps discret.

Question 5

La Figure 2 montre que la sortie $y(t)$ oscille après l'échelon, confirmant l'instabilité du système en boucle ouverte.

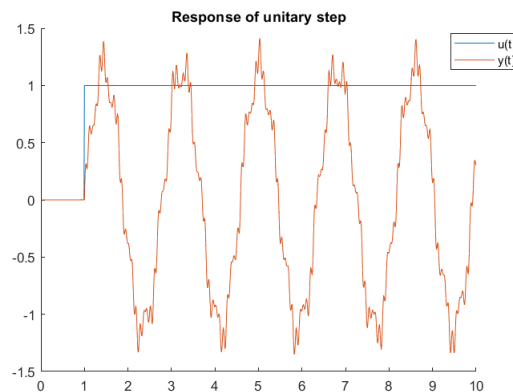
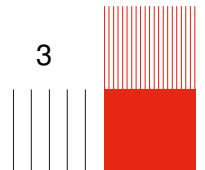


FIGURE 2 – Response du système en boucle ouverte.



Question 6

Nous savons que : $x_1(\zeta, t) = \frac{d^2 w}{d\zeta^2}(\zeta, t) \Rightarrow w(\zeta, t) = \int \int_0^L x_1(\mu, t) d\mu$
comme $x_1(\mu, t) = \Phi^T(\mu) x_d(t)$
d'où

$$w(\zeta, t) = \left[\int_0^\zeta \Phi(\mu) d\mu \quad 0_{\mathbb{R}_{1 \times 4}} \right] x_d(t) \quad (16)$$

2 RETOUR DE SORTIE

Question 7

Nous avons implémenté la loi de commande : $u(t) = -Ky(t) + Hy_c(t)$ Nous avons utilisé une boucle `for` sous MATLAB afin de tester les valeurs de k entre 0 et 100.

Le gain H est ensuite calculé à partir d'un système en boucle fermée sous la forme :

$$H = -\frac{1}{C(A-BKC)^{-1}B}$$

Ainsi, les valeurs retenues pour la commande en boucle fermée sont : **K = 1.85 & H = -3**

Question 8

La Figure 3 montre que $w(L, t)$ suit la consigne $w_c(t)$ unitaire, avec une erreur nulle en régime permanent, et un temps caractéristique à $\tau = 1s$.

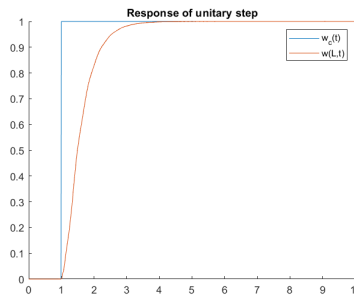
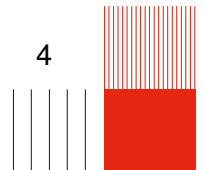


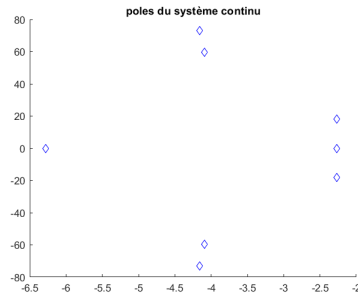
FIGURE 3 – Suivi de la consigne $w_c(t)$ par la position $w(L, t)$.

2.1 Retour de sortie par ZOH

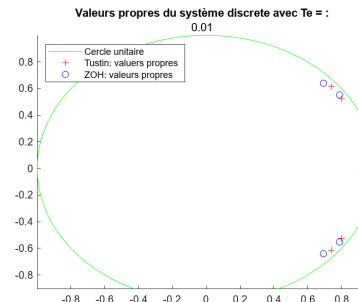
Question 9

La Figure 4 compare les valeurs propres du système en boucle fermée en temps continu avec celles obtenues après discrétisation par ZOH, pour les trois périodes d'échantillonnage proposées : $T_e = \{0.01s; 0.02s; 0.04s\}$.

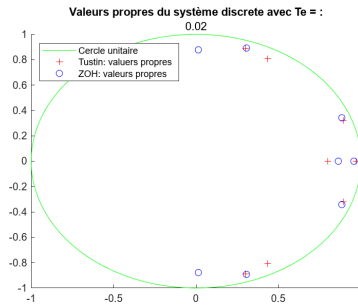




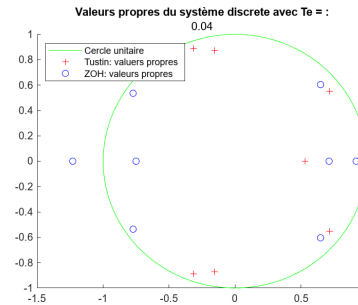
(a) Valeurs propres en temps continu.



(b) $T_s = 0.01$ s.



(c) $T_s = 0.02$ s.



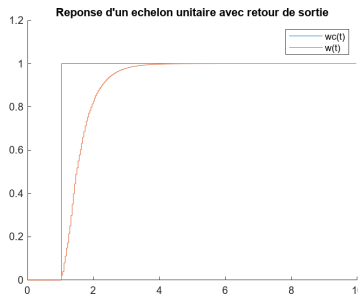
(d) $T_s = 0.04$ s.

FIGURE 4 – Valeurs propres dans le cas d'un retour de sortie

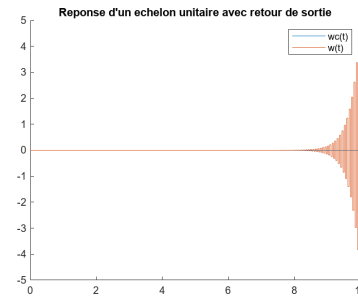
Comme nous pouvons voir, les pôles du système discret restent à l'intérieur du cercle unitaire, mais prendre $T_e = 0.04$ s rend le système instable avec un pôle hors du cercle.

Question 10

Nous avons trouvé un seuil de $T_s = 0.0356$ s à l'aide d'un boucle qui traverse les différents périodes d'échantillonnage.



(a) Système sur le seuil : $T_s = 0.0356$ s



(b) Système hors le seuil : $T_s = 0.0366$ s

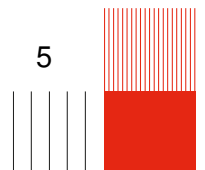
3 RETOUR D'ÉTAT

Question 11

Avec la fonction `lqr` de MATLAB, le gain de retour d'état obtenu est :

$$K = [0.97 \quad -14.62 \quad 0.66 \quad 1.32 \quad 19.32 \quad 0.39 \quad 2.40 \quad -2.11] \quad (17)$$

Question 12



La Figure 6 montre que le système en boucle fermée suit correctement la référence avec un léger dépassement et converge vers la consigne en régime permanent.

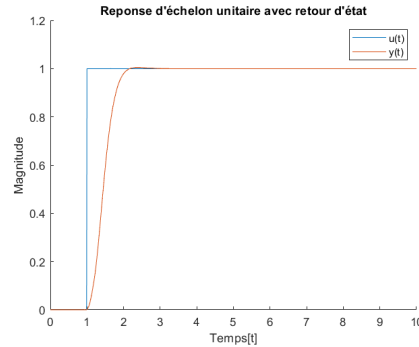


FIGURE 6 – Simulation numérique du système continu en boucle fermée.

3.1 Retour d'état par ZOH

Question 13

Avec la même période d'échantillonnage comme dans la section précédente : $T_e = 0.0356$ notre système se déstabilise.

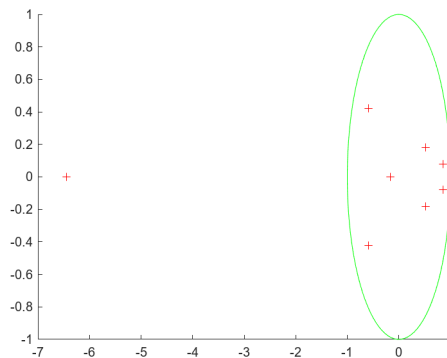
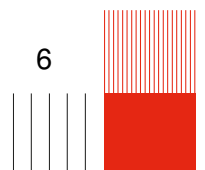
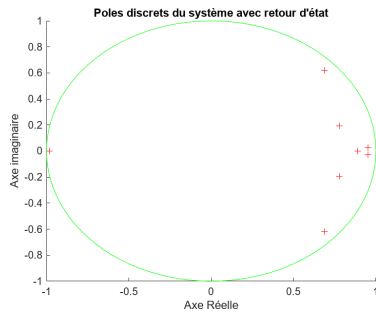


FIGURE 7 – Pôles du système avec temps d'échantillonnage : $T_e = 0.0356$

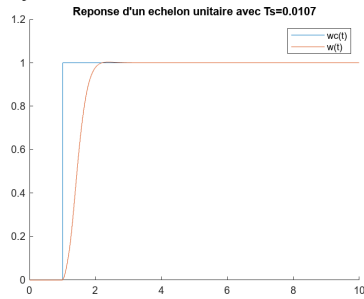
Question 14

Nous retrouvons un seuil d'échantillonnage à : $T_e = 0.0107s$. Voici les comportements du système sur et hors le seuil.

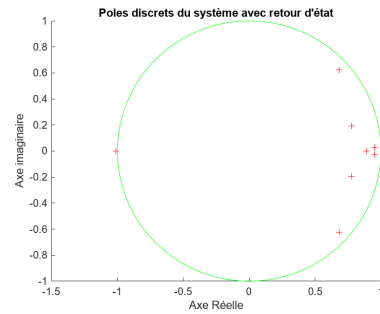




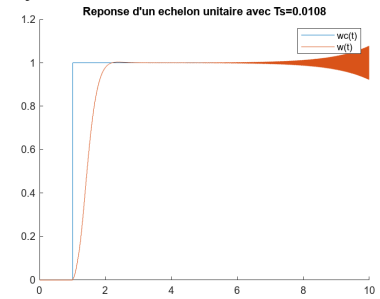
(a) Système sur le seuil : $T_s = 0.0107s$



(c) Reponse à un echelon unitaire : $T_s = 0.0107s$



(b) Système hors le seuil : $T_s = 0.0108s$



(d) Reponse à un echelon unitaire : $T_s = 0.0108s$

4 REJET DE PERTURBATION

Question 15

Soit $q(\zeta, t) = q_0(t)$ et $F_{ext} = -\int_0^L \Phi(\zeta)q(\zeta, t)d\zeta \Leftrightarrow F_{ext} = -\int_0^L \Phi(t)q_0(t)$

Or $E\dot{x}_{2d} = -D^T x_{1d}(t) - \Phi(L)u(t) - F_{ext} \Leftrightarrow$

$$\dot{x}_{2d} = -E^{-1}D^T x_{1d}(t) - E^{-1}\Phi(L)u(t) + E^{-1}\int_0^L \Phi(\zeta)d\zeta q_0(t)$$

$$\text{D'où } \dot{x}_d(t) = Ax_d(t) + Bu(t) + \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{R}^{4 \times 1}} \\ E^{-1}\int_0^L \Phi(\zeta)d\zeta \end{bmatrix} q_0(t)$$

Après avoir calculé, nous retrouvons la matrice B_p sous la forme :

$$B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -E^{-1}\int_0^L \Phi(\zeta)d\zeta \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]^T \quad (18)$$

Question 16

La Figure 9 montre que le système ne corrige pas l'erreur due à la perturbation.

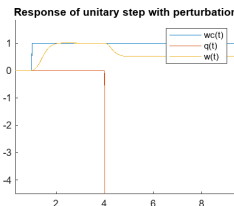
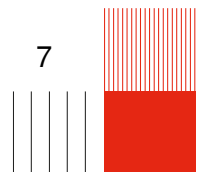


FIGURE 9 – Simulation du système avec une perturbation.

Pour résoudre ce problème, il faudra ajouter une action intégrale.



4.1 Remplacement du pré-gain H

Question 17

À partir des huit pôles obtenus avec la commande par retour d'état de la Question 11, on ajoute un pôle supplémentaire associé à l'action intégrale $p_i = -4.3805$, correspondant au pôle du système le plus rapide. Ainsi, les pôles désirés du système augmenté sont :

$$p_{des} =$$

$$[-85 \quad -8 + 69i \quad -8 - 69i \quad -28 + 17i \quad -28 - 17i \quad -16 \quad -4 + 3i \quad -4 - 3i \quad -4]^T \quad (19)$$

Question 18

En utilisant la fonction `place` sous MATLAB, nous avons calculé les gains K_1 et K_i à partir du système augmenté :

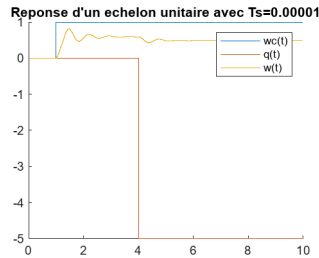
$$K_{Aug} = [K_1 \quad K_i] \quad (20)$$

$$K_1 = [-3.1081 \quad -18.9367 \quad -0.1707 \quad 2.1192 \quad 19.4677 \quad -2.3049 \quad 2.3377 \quad -1.7524] \quad (21)$$

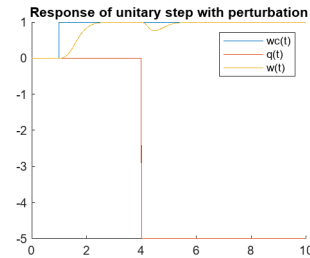
$$K_i = [26.2831] \quad (22)$$

Question 19

La Figure 10 montre qu'avec l'action intégrale, la perturbation est rejetée et l'erreur en régime permanent est corrigée.



(a) Erreur en regime permanente

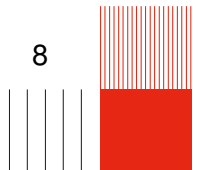
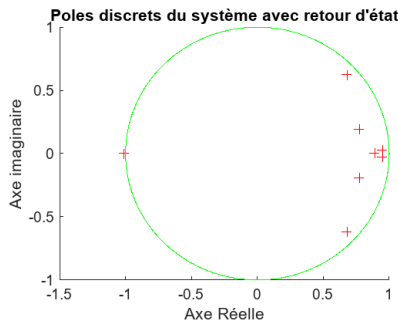


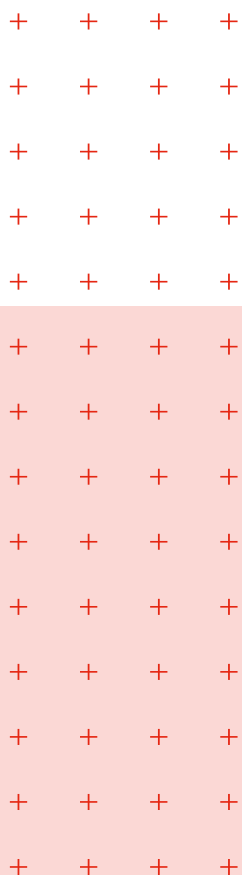
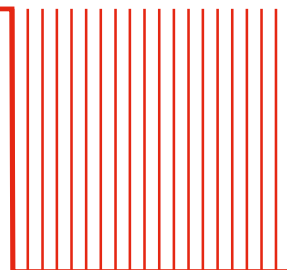
(b) Erreur nulle en regime permanente

FIGURE 10 – Simulation du système avec correction par action intégrale.

Question 20

Nous avons testé avec 6 decimals, mais nous avons un pôle : $|z| > 1$, alors nous n'arrivons jamais à stabiliser le système. Aussi, nous considérons avec $T_s \rightarrow 0.00001$ est un temps continu, la commande n'est pas donc implemantable sur un controleur numérique.





INSA TOULOUSE

135 avenue de Ranguel
31400 Toulouse

Tel : +33 (0)5 61 55 95 13

www.insa-toulouse.fr

